ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Σταθμητοί Χώροι και Ευκλείδειοι Χώροι

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Μέρος 2. Ευκλείδειοι Χώροι

10. Σταθμητοί Χώροι και Ευκλείδειοι Χώροι

10.1. **Σταθμητοί Χώροι.** Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Τότε όπως γνωρίζουμε η απεικόνιση "μήκος διανύσματος"

$$\| \cdot \| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

ικανοποιεί, μεταξύ άλλων, τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\|r\vec{x}\| = |r| \, \|\vec{x}\|, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}.$
2. (Τριγωνική ανισότητα): $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}.$
3. $\|\vec{x}\| \geq 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και αν $\|\vec{x}\| = 0$, τότε $\vec{x} = \vec{0}$.

Ορισμός 10.1. *Μια απεικόνιση $\| \cdot \| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη υπεράνω του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις τρείς παραπάνω ιδιότητες καλείται* **στάθμη** *επί του $\mathcal{E}$.*

*Ένας $\mathbb{R}$-***σταθμητός χώρος** *είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{E}, \| \cdot \|)$, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\| \cdot \|$ είναι μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$.*

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι αν $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, τότε ικανοποιείται ο ακόλουθος

$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \qquad \text{(Νόμος Παραλληλογράμμου)}$$

Άρα αν $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, τότε ορίζεται επί του $\mathcal{E}$ μια στάθμη $\| \cdot \| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$, η οποία ικανοποιεί τον νόμο του Παραλληλογράμμου.

10.2. **Το Θεώρημα των Jordan-Von Neumann.** Αντίστροφα ένα σημαντικό Θεώρημα, το οποίο οφείλεται στους Jordan και Von Neumann, βλέπε P. Jordan and J. Von Neumann: "*On Inner product spaces in linear metric spaces*", Annals of Mathematics, **36**, (1935), δείχνει ότι οι Ευκλείδειοι χώροι χαρακτηρίζονται ώς οι σταθμητοί χώροι των οποίων η στάθμη ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου. Για την απόδειξη του, η οποία χρησιμοποιεί βασικά στοιχεία τοπολογίας, χρειαζόμαστε κάποια προεργασία.

Ορισμός 10.2. *Ένας* **μετρικός χώρος** *είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{E}, \rho)$, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένα μη-κενό σύνολο και*

$$\rho : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x, y) \longmapsto \rho(x, y)$$

είναι μια απεικόνιση, η οποία καλείται **μετρική**, *έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) $\forall x, y \in \mathcal{E}$: $\rho(x, y) \geq 0$
(2) $\rho(x, y) = 0$ *αν και μόνον αν* $x = y$.
(3) $\forall x, y \in \mathcal{E}$: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
(4) $\forall x, y, z \in \mathcal{E}$: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Ένας μετρικός χώρος ο οποίος είναι και $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, καλείται **διανυσματικός μετρικός χώρος**.

Λήμμα 10.3. *Έστω $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος. Τότε η απεικόνιση*

$$\rho : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

είναι μια μετρική επί του $\mathcal{E}$ και το ζεύγος $(\mathcal{E}, \rho)$ είναι ένας μετρικός διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη. Το ότι η απεικόνιση ρ είναι μετρική είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων της στάθμης $\|\cdot\|$. □

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τις ακόλουθες συνεπαγωγές

$$(\mathcal{E}, \langle,\rangle) : \text{ Ευκλείδειος Χώρος } \Longrightarrow (\mathcal{E}, \|\cdot\|) : \text{ Σταθμητός Χώρος } \Longrightarrow (\mathcal{E}, \rho) : \text{ Μετρικός Διανυσματικός Χώρος}$$

Σε έναν μετρικό (διανυσματικό) χώρο $(\mathcal{E}, \rho)$ μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης και συνέχειας ως εξής:

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{E}$.

(1) Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει ισχυρά** στο στοιχείο $y \in \mathcal{E}$, και θα γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y$$

αν:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \|x_n - y\| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

Προφανώς $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ αν και μόνον αν η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\|x_n - y\|$ συγκλίνει στο 0: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = 0$.

(2) Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται **ακολουθία Cauchy** αν:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι κάθε ισχυρά συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{E}$ είναι ακολουθία Cauchy, και το όριο μιας ισχυρά συγκλίνουσας ακολουθίας (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

(3) Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, μια συνάρτηση. Τότε η f καλείται **συνεχής** αν για κάθε στοιχείο y του $\mathcal{E}$ και κάθε ισχυρά συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, ισχύει ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(y)$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$$

Στην απόδειξη του κύριου Θεωρήματος της παρούσης παραγράφου θα χρειαστούμε την ακόλουθη:

Πρόταση 10.4. *Έστω $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος.*

(1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

(2) *Η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. (1) Θα έχουμε:

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y} + (\vec{x} - \vec{y})\| \leq \|\vec{y}\| + \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{και άρα} \quad \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Παρόμοια θα έχουμε: $\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$ απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

(2) Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ισχυρά συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{y}$. Τότε από το (1) θα έχουμε:

$$\big|\|\vec{x}_n\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x}_n - \vec{y}\|$$

και επομένως:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \big|\|\vec{x}_n\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \lim_{n\to\infty} \|\vec{x}_n - \vec{y}\| = 0$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\|\vec{x}_n\|_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\|\vec{y}\|$:

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{x}_n\| = \|y\|$$

και άρα η στάθμη $\|\cdot\|$ είναι συνεχής. $\square$

Θεώρημα 10.5 (Jordan - Von Neumann (1935)). *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου. Τότε η απεικόνιση*

$$\langle\, , \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4} \tag{$\dagger$}$$

ορίζει ένα μοναδικό εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2$$

Επομένως αν $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος*

(2) *Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ είναι σταθμητός χώρος και η στάθμη του $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου.*

Απόδειξη. (**a**) Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της στάθμης $\|\cdot\|$ θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4} = \frac{\|\vec{y}+\vec{x}\|^2 - \|(-1)(\vec{y}-\vec{x}\|^2}{4} = \frac{\|\vec{y}+\vec{x}\|^2 - (-1)^2\|\vec{y}-\vec{x}\|^2}{4} =$$

$$= \frac{\|\vec{y}+\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}-\vec{x}\|^2}{4} = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

Άρα $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

(**c**) Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{x}\|^2}{4} = \frac{\|2\vec{x}\|^2}{4} = \frac{|2|^2\|\vec{x}\|^2}{4} = \frac{4\|\vec{x}\|^2}{4} = \|\vec{x}\|^2 \geq 0$$

Αν $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, τότε από την παραπάνω σχέση θα έχουμε: $\|\vec{x}\|^2$ και επειδή η απεικόνιση $\|\cdot\|$ είναι στάθμη θα έχουμε $\vec{x} = \vec{0}$.

(**b**) Έστω $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Από τον ορισμό της απεικόνισης $\langle\, , \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{z}\|^2}{4} \quad \text{και} \quad \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \frac{\|\vec{y}+\vec{z}\|^2 - \|\vec{y}-\vec{z}\|^2}{4}$$

και επομένως:

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 + \|\vec{y}+\vec{z}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{z}\|^2 - \|\vec{y}-\vec{z}\|^2}{4} \tag{$*$}$$

Εφαρμώζοντας το Νόμο του Παραλληλογράμμου για τα διανύσματα $\vec{x}+\vec{z}$ και $\vec{y}+\vec{z}$ θα έχουμε:

$$2\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 + 2\|\vec{y}+\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}+2\vec{z}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$2\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 + 2\|\vec{y}+\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}+2\vec{z}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}+\vec{y}\|^2$$

Εφαρμόζοντας στην τελευταία σχέση πάλι το Νόμο του Παραλληλογράμμου για τα διανύσματα $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ και $\vec{z}$ θα έχουμε:

$$2\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 + 2\|\vec{y}+\vec{z}\|^2 = 2\|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|^2 + 2\|\vec{z}\|^2$$

και επομένως η προτελευταία σχέση γράφεται:

$$2\|\vec{x}+\vec{z}\|^2+2\|\vec{y}+\vec{z}\|^2 \;=\; 2\|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|^2+2\|\vec{z}\|^2-\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \tag{10.1}$$

Θέτοντας $-\vec{z}$ στην θέση του $\vec{z}$ η παραπάνω σχέση δίνει:

$$2\|\vec{x}-\vec{z}\|^2+2\|\vec{y}-\vec{z}\|^2 \;=\; 2\|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|^2+2\|\vec{z}\|^2-\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \tag{10.2}$$

Αφαιρώντας την (10.2) από την (10.1) τότε θα έχουμε την ταυτότητα:

$$\|\vec{x}+\vec{z}\|^2+\|\vec{y}+\vec{z}\|^2-\|\vec{x}-\vec{z}\|^2-\|\vec{y}-\vec{z}\|^2 \;=\; \|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|^2+\|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|^2$$

Τότε η $(*)$ γράφεται ώς εξής:

$$\langle\vec{x},\vec{z}\rangle+\langle\vec{y},\vec{z}\rangle \;=\; \frac{\|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|^2+\|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|^2}{4} \;=\; \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle$$

Άρα θα έχουμε:

$$\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle \;=\; \langle\vec{x},\vec{z}\rangle+\langle\vec{y},\vec{z}\rangle \tag{10.3}$$

(ii) Μένει να δείξουμε ότι: $\langle\lambda\vec{x},\vec{y}\rangle=\lambda\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.

• Από την σχέση (10.3) έπεται άμεσα ότι: $\langle 2\vec{x},\vec{y}\rangle=2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$. Επαγωγικά προκύπτει εύκολα ότι:

$$\langle n\vec{x},\vec{y}\rangle=n\langle\vec{x},\vec{y}\rangle, \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Από την άλλη πλευρά, θα έχουμε:

$$\langle 0\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \langle\vec{0},\vec{y}\rangle \;=\; \frac{\|\vec{0}+\vec{y}\|^2-\|\vec{0}-\vec{y}\|^2}{4} \;=\; \frac{\|\vec{y}\|^2-\|-\vec{y}\|^2}{4} \;=\; \frac{\|\vec{y}\|^2-(-1)^2\|\vec{y}\|^2}{4} \;=$$
$$=\; \frac{\|\vec{y}\|^2-\|\vec{y}\|^2}{4} \;=\; 0$$

Επίσης αν $n\in\mathbb{N}$, τότε:

$$n\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+\langle(-n)\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \langle(n+(-n))\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \langle 0\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \langle\vec{0},\vec{y}\rangle=0$$

και επομένως

$$\langle(-n)\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; (-n)\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε:

$$\langle n\vec{x},\vec{y}\rangle=n\langle\vec{x},\vec{y}\rangle, \qquad \forall n\in\mathbb{Z} \tag{10.4}$$

• Έστω τώρα $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$. Τότε:

$$n\langle\frac{m}{n}\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \langle n\frac{m}{n}\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \langle m\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; m\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

και άρα θα έχουμε:

$$\langle\frac{m}{n}\vec{x},\vec{y}\rangle \;=\; \frac{m}{n}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

Δηλαδή

$$\langle r\vec{x},\vec{y}\rangle=r\langle\vec{x},\vec{y}\rangle, \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \tag{10.5}$$

• Τέλος υποθέτουμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, όπως είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό, υπάρχει μια ακολουθία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών αριθμών έτσι ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lambda$$

Επειδή από την Πρόταση 10.4 η απεικόνιση $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$ είναι συνεχής, έπεται ότι και η απεικόνιση, για σταθερό $\vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle -, \vec{y}\rangle : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \vec{x} \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4}$$

είναι συνεχής συνάρτηση του $\vec{x}$. Τότε θα έχουμε:

$$\langle \lambda\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} r_n\vec{x}, \vec{y}\rangle = \frac{\|\lim_{n\to\infty} r_n\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\lim_{n\to\infty} r_n\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4} =$$

$$= \frac{\|\lim_{n\to\infty}(r_n\vec{x}+\vec{y})\|^2 - \|\lim_{n\to\infty}(r_n\vec{x}-\vec{y})\|^2}{4} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\|r_n\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \lim_{n\to\infty}\|r_n\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\|r_n\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|r_n\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4} = \lim_{n\to\infty}\langle r_n\vec{x}, \vec{y}\rangle =^{(*)} \lim_{n\to\infty} r_n\langle \vec{x}, \vec{y}\ \rangle = \lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

όπου στην ισότητα $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την σχέση (10.5).

Επομένως δείξαμε ότι η απεικόνιση $\langle , \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{E}$, το οποίο λόγω της (**c**) ικανοποιεί τη σχέση $\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|^2$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

Αν $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, είναι ένα άλλο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{E}$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\langle\!\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle\!\rangle = \|\vec{x}\|^2$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε η σχέση (†) δείχνει ότι: $\langle\!\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle\!\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. □

Το ακόλουθο είναι ένα παράδειγμα σταθμητού χώρου του οποίου η στάθμη δεν ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου και άρα ο χώρος δεν είναι Ευκλείδειος.

Παράδειγμα 10.6. *Έστω $p \geq 1$ και έστω το ακόλουθο σύνολο ακολουθιών πραγματικών αριθμών:*

$$\ell^p(\mathbb{R}) := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\Big\}$$

Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι το σύνολο $\ell^p(\mathbb{R})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω του (R). Ορίζουμε μια απεικόνιση:

$$\|\cdot\|_p : \ell^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p$ είναι μια στάθμη επί του $\ell^p(\mathbb{R})$ και άρα το ζεύγος $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ είναι ένας σταθμητός χώρος.

(1) *Αν $p = 2$, τότε βλέπουμε εύκολα ότι η απεικόνιση*

$$\langle , \rangle \; : \; \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\ell^2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε: $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^2 = \langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$. Άρα το ζεύγος $(\ell^2(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

(2) *Θα δείξουμε ότι αν $p > 2$, τότε δεν ισχύει ο Νόμος του Παραλληλογράμμου. Πραγματικά: όπως έχουμε δει αν ισχύει ο Νόμος του Παραλληλογράμμου, τότε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \ell^2(\mathbb{R})$:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \; + \; \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \; = \; 2\|\vec{x}\|^2 \; + \; 2\|\vec{y}\|^2 \tag{+}$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 0, 0, \cdots) \qquad \textit{και} \qquad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 0, 0, \cdots)$$

οι οποίες προφανώς ανήκουν στον σταθμητό χώρο $\ell^p(\mathbb{R})$. Υπολογίζουμε εύκολα:

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{και} \qquad \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = 2$$

Άρα λόγω της σχέσης $(+)$ θα πρέπει

$$2(2^{\frac{1}{p}})^2 + 2(2^{\frac{1}{p}})^2 = 2^2 + 2^2 \quad \Longrightarrow \quad 2^2 = 2^p$$

το οποίο ισχύει αν και μόνον αν $p = 2$. Άρα αν $p > 2$, δεν ισχύει η σχέση $(+)$ και άρα και ο Νόμος του Παραλληλογράμμου. Συμπεραίνουμε ότι αν $p > 2$, τότε δεν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ στον σταθμητό χώρο $\ell^p(\mathbb{R})$, έτσι ώστε: $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^2$.

Παρατήρηση 10.7. *Υπάρχουν περισσότεροι από 350 χαρακτηρισμοί του πότε ένας σταθμητός χώρος είναι Ευκλείδειος, βλέπε το βιβλίο: D. Amir: Characterizations of Inner Product Spaces, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Ο χαρακτηρισμός του Θεωρήματος 10.5, ο οποίος οφείλεται στους Jordan και Von Neumann και αποδείχθηκε το 1935, είναι ίσως ο πρώτος ιστορικά χαρακτηρισμός.*

Αναφέρουμε μόνο τους ακόλουθους ενδιαφέροντες χαρακτηρισμούς:

Θεώρημα 10.8. *Για έναν σταθμητό χώρο $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδυναμες:*

(1) *Υπάρχει ένα (μοναδικό) εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, έτσι ωστε:*

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2, \qquad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

(2) *(Lorch (1947)) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\Big(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\Big)\Big\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\Big\| \; \leq \; 2\|\vec{x} - \vec{y}\|$$

(3) *(Lorch (1947)) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\| = \|\lambda\vec{x} + \vec{y}\|$$

(4) *(Lorch (1947)) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \quad \textit{και} \quad \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|\vec{y} - \vec{z}\|$$

(Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι διχοτόμοι των ίσων γωνιών είναι ίσες).

(5) *(Day (1947)) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.

Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή, Διεθνής Έκδοση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη.

[1] https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.