ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Η Ορίζουσα Gram και οι Εφαρμογές της

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

11. Η Ορίζουσα Gram και οι Εφαρμογές της

Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε, μεταξύ άλλων, μια γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα, και ένα χρήσιμο κριτήριο για το πότε ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{S} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

11.1. **Πίνακας και Ορίζουσα Gram.**

Ορισμός 11.1. *Ο* **πίνακας Gram** *των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ ορίζεται να είναι ο πίνακας:*

$$G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) := \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_m\rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1\rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_m, \vec{x}_1\rangle & \langle \vec{x}_m, \vec{x}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{x}_m, \vec{x}_m\rangle \end{pmatrix}$$

Η **ορίζουσα Gram** *των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ ορίζεται να είναι η ορίζουσα του πίνακα Gram:*

$$\big|G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)\big|$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα Gram είναι η ορίζουσα ενός συμμετρικού πίνακα διότι:

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j\rangle = \langle \vec{x}_j, \vec{x}_i\rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq m$$

- Αν $n = 1$, τότε η ορίζουσα Gram του διανύσματος $\vec{x}_1$ είναι:

$$\big|G(\vec{x}_1)\big| = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle = \|\vec{x}_1\|^2 \ \geq 0$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\vec{x}_1 = \vec{0}$.

- Αν $n = 2$, τότε η ορίζουσα Gram των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ είναι:

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\big| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1\rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \|\vec{x}_1\|^2 & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1\rangle & \|\vec{x}_2\|^2 \end{vmatrix} = \|\vec{x}_1\|^2 \, \|\vec{x}_2\|^2 - \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle^2 \ \geq \ 0$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της ανισότητας των Cauchy-Schwarz. Επιπλέον

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\big| = 0 \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \text{τα} \quad \vec{x}_1, \vec{x}_2 \quad \text{είναι γραμμικά εξαρτημένα}$$

Θα δούμε ότι ισχύει κάτι ανάλογο και για $n \geq 3$.

Πρόταση 11.2. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\big\}$ του $\mathcal{E}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
(2) $\big|G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)\big| \neq 0$.

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2) Έστω ότι το $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$ και:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0} \tag{11.1}$$

Τότε θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της (11.1) με το διάνυσμα $\vec{x}_i$, $1 \leq i \leq m$, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}_i, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m\rangle = \langle \vec{x}_i, \vec{0}\rangle = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\lambda_1\langle\vec{x}_i,\vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle\vec{x}_i,\vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_m\langle\vec{x}_i,\vec{x}_m\rangle = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

Οι τελευταίες σχέσεις δείχνουν ότι θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης

$$\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \cdots \lambda_m\Gamma_m = 0$$

μεταξύ των γραμμών

$$\Gamma_i = \Big(\langle\vec{x}_i,\vec{x}_1\rangle, \;\; \langle\vec{x}_i,\vec{x}_2\rangle, \;\; \cdots, \;\; \langle\vec{x}_i,\vec{x}_m\rangle\Big)$$

του πίνακα Gramm $G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)$. Τότε όμως η ορίζουσα Gram είναι μηδέν. Άρα αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι: $\big|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\big| \neq 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Έστω ότι: $\big|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\big| = 0$. Τότε οι γραμμές του πίνακα $G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες ή ισοδύναμα οι στήλες του $G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1,\cdots,\lambda_m \in \mathbb{R}$, όπου: $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m) \neq (0,\cdots,0)$, έτσι ώστε:

$$\lambda_1\Sigma_1 + \lambda_2\Sigma_2 + \cdots \lambda_m\Sigma_m = 0$$

Δηλαδή:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \langle\vec{x}_1,\vec{x}_1\rangle \\ \langle\vec{x}_2,\vec{x}_1\rangle \\ \vdots \\ \langle\vec{x}_m,\vec{x}_1\rangle \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \langle\vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle \\ \langle\vec{x}_2,\vec{x}_2\rangle \\ \vdots \\ \langle\vec{x}_m,\vec{x}_2\rangle \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{pmatrix} \langle\vec{x}_1,\vec{x}_m\rangle \\ \langle\vec{x}_2,\vec{x}_m\rangle \\ \vdots \\ \langle\vec{x}_m,\vec{x}_m\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\lambda_1\langle\vec{x}_i,\vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle\vec{x}_i,\vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_m\langle\vec{x}_i,\vec{x}_m\rangle = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

και επομένως

$$\langle\vec{x}_i, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m\rangle = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

Πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά κάθε σχέση από τις παραπάνω με λ_1, $\cdots$, λ_m και ακολούθως προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν καταλήγουμε στην σχέση:

$$\|\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m\|^2 = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}$$

και επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Καταλήγουμε: αν η ορίζουσα Gram $\big|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\big| \neq 0$, τότε το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Έστω $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{S} = \big\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_m\big\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$.

Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Τότε θα έχουμε μοναδική γραφή των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{S}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$\vec{x}_1 = x_{11}\vec{e}_1 + x_{12}\vec{e}_2 + \cdots + x_{1n}\vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_i = x_{i1}\vec{e}_1 + x_{i2}\vec{e}_2 + \cdots + x_{in}\vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_m = x_{m1}\vec{e}_1 + x_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + x_{mn}\vec{e}_n$$

Συμβολίζουμε με H τον $m \times n$ πίνακα του οποίου οι γραμμές είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ στην βάση $\mathcal{B}$:

$$H = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε εύκολα:

$$H \cdot {}^tH = G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι:

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{jk} = (H \cdot {}^tH)_{ij}$$

Πρόταση 11.3. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Τότε:*

$$\left| G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) \right| \; \geq \; 0$$

Επιπλέον:

(1) $\left| G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) \right| = 0$ *αν και μόνον αν το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
(2) $\left| G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) \right| > 0$ *αν και μόνον αν το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η ορίζουσα Gram είναι μη-αρνητική. Από την προηγούμενη Πρόταση αρκεί να δείξουμε ότι αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε η ορίζουσα Gram είναι θετική.

Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$. Από την ανάλυση που προηγήθηκε έπεται ότι:

$$H \cdot {}^tH = G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$$

Από το Φασματικό Θεώρημα έπεται ότι ο συμμετρικός πίνακας $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{R}$. Έστω λ μια ιδιοτιμή του $G := G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα-στήλη Y:

$$G \cdot Y = \lambda Y, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Τότε εργαζόμενοι στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_m$ θα έχουμε:

$$\|Y\|^2 = \langle Y, Y \rangle = {}^tY \cdot Y$$

Άρα:

$$\lambda \|Y\|^2 = \lambda({}^tY \cdot Y) = ({}^tY) \cdot (\lambda \cdot Y) = {}^tY \cdot G \cdot Y = {}^tY \cdot H \cdot {}^tH \cdot Y = {}^t({}^tH \cdot Y) \cdot ({}^tH \cdot Y) =$$

$$= \langle {}^tH \cdot Y, {}^tH \cdot Y \rangle = \|{}^tH \cdot Y\|^2 \; \geq \; 0$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι $\lambda \geq 0$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι η ορίζουσα Gram είναι $\neq 0$ και επομένως ο πίνακας Gram δεν έχει το 0 ως ιδιοτιμή. Καταλήγουμε ότι όλες ιδιοτιμές του πίνακα Gram ανήκουν στο $\mathbb{R}$ και είναι όλες > 0. Επειδή η ορίζουσα ενός πίνακα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του, αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα Gram είναι θετική. $\square$

11.2. **Διαδικασία Gram-Schmidt.** Υπενθυμίζουμε την Διαδικασία Gram-Schmidt για το *γραμμικά ανεξάρτητο* σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{S} = \left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\right\}$$

του $\mathcal{E}$:

Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι η *ορθογώνια προβολή* του $\vec{y} \neq \vec{0}$ στο $\vec{x}$ ορίζεται να είναι το διάνυσμα:

$$\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) := \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \cdot \vec{y}$$

Για την απλοποίηση των υπολογισμών που θα ακολουθήσουν, ορίζουμε την *αριθμητική προβολή* του $\vec{y}$ στο $\vec{x}$ να είναι ο αριθμός:

$$\pi_{\vec{y}}(\vec{x}) := \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \pi_{\vec{y}}(\vec{x}) \cdot \vec{y}$$

<u>*Κατασκευή Ορθογώνιου Συνόλου*</u> $\mathcal{T} = \left\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m\right\}$

$(\mathbf{GS_1})$ Θέτουμε:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1$$

$(\mathbf{GS_2})$ Θέτουμε:

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \pi_{y_1}(\vec{x}_1) \cdot \vec{y}_1$$

$$\vdots$$

$(\mathbf{GS_k})$ Επαγωγικά:

$$\vec{y}_k = \vec{x}_k - \pi_{y_1}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_1 - \pi_{y_2}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_2 - \cdots - \pi_{y_{k-1}}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_{k-1} \; = \; \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{y_i}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_i$$

Τότε το σύνολο $\mathcal{T} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το $\mathcal{T}$ είναι ορθογώνιο: $\langle \vec{y}_i, \vec{y}_j \rangle = 0, \; \forall 1 \leq i \neq j \leq m$.

2. Για κάθε $1 \leq k \leq m$: ο υπόχωρος $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k)$ ο οποίος παράγεται από το σύνολο $\mathcal{S}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k)$ ο οποίος παράγεται από το σύνολο $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) \; = \; \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k), \qquad 1 \leq k \leq m \tag{11.2}$$

3. Επομένως, για κάθε $2 \leq k \leq m$:

$$\vec{y}_k \; \in \; \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})^{\perp} \tag{11.3}$$

4. Αν $\mathcal{L}(\vec{y}_k)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από το $\vec{y}_k$, τότε:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \oplus \mathcal{L}(\vec{y}_k) \qquad \text{(Ορθογώνιο Ευθύ Άθροισμα)}$$

5.

$$0 \; \leq \; \|\vec{y}_k\| \; \leq \; \|\vec{x}_k\| \qquad 1 \leq k \leq m \tag{11.4}$$

Πράγματικά: χρησιμοποιώντας την $(\mathbf{GS_k})$ και τα **2**. και **4**. Θα έχουμε

$$\vec{x}_k = \vec{z}_k + \vec{y}_k$$

$$\vec{z}_k = \pi_{y_1}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_1 + \pi_{y_2}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_2 + \cdots + \pi_{y_{k-1}}(\vec{x}_k) \cdot \vec{y}_{k-1} \quad \in \quad \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$$

Επειδή $\langle \vec{z}_k, \vec{y}_k \rangle = 0$, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, θα έχουμε:

$$0 \;\leq\; \|\vec{y}\|^2 \;\leq\; \|\vec{z}_k\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}_k\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \;\leq\; \|\vec{y}_k\| \;\leq\; \|\vec{x}_k\|$$

6. Επειδή το σύνολο $\mathcal{T} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m\}$ είναι ορθογώνιο, θα έχουμε:

$$G(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m) := \begin{pmatrix} \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \vec{y}_m, \vec{y}_m \rangle \end{pmatrix}$$

και άρα:

$$\big|G(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)\big| = \|\vec{y}_1\|^2 \cdot \|\vec{y}_2\|^2 \cdot \;\cdots\; \cdot \|\vec{y}_m\|^2 \tag{11.5}$$

7. Το σύνολο διανυσμάτων

$$\Big\{ \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}, \cdots, \frac{\vec{y}_m}{\|\vec{y}_m\|} \Big\}$$

είναι ορθοκανονικό και άρα αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$.

Δείχνουμε τώρα ότι η ορίζουσα Gram των διανυσμάτων $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι ίση με την ορίζουσα Gram των διανυσμάτων $\mathcal{T} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m\}$.

Πρόταση 11.4. *Έστω $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$, και έστω $\mathcal{T} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m\}$ το ορθογώνιο σύνολο το οποίο προκύπτει από το $\mathcal{S}$ με την διαδικασία Gram-Schmidt. Τότε:*

$$\big|G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)\big| \;=\; \big|G(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)\big| \;=\; \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle \cdot \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle \cdot \;\cdots\; \cdot \langle \vec{y}_m, \vec{y}_m \rangle$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις, οι οποίες δεν αλλάζουν την ορίζουσά, στις γραμμές και στις στήλες του πίνακα Gram:

$$G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_m \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_m, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_m, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_m, \vec{x}_m \rangle \end{pmatrix}$$

Κατ' αρχήν αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε προφανώς και το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και τότε $\big|G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)\big| = 0 = \big|G(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)\big|$.

Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{S}$, άρα και το $\mathcal{T}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(1) Θέτουμε $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$ παντού στον πίνακα $G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)$.

(2) Το διάνυσμα $\vec{y}_2$ είναι της μορφής: $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \kappa \vec{y}_1$. Πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα $G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)$ με το κ, και ακολούθως προσθέτουμε την προκύπτουσα στήλη στην δεύτερη στήλη του πίνακα $G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)$. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα $G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)$ με το κ και ακολούθως προσθέτουμε την προκύπτουσα γραμμή στην δεύτερη γραμμή του πίνακα $G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)$.

Έτσι, με τις παραπάνω πράξεις οι οποίες δεν αλλάζουν την ορίζουσα, τα διανύσματα $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$ εμφανίζονται σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας όπου εμφανίζονταν τα $\vec{y}_1$ και $\vec{x}_2$, και επομένως θα έχουμε:

$$\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| = \mathsf{Det}\begin{pmatrix} \langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_1,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_1,\vec{x}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_1,\vec{x}_m\rangle \\ \langle\vec{y}_2,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_2,\vec{x}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_2,\vec{x}_m\rangle \\ \langle\vec{x}_3,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{x}_3,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{x}_3,\vec{x}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{x}_3,\vec{x}_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\vec{x}_m,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{x}_m,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_m,\vec{x}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{x}_m,\vec{x}_m\rangle \end{pmatrix}$$

(3) Ακολούθως το διάνυσμα $\vec{y}_3$ είναι της μορφής $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2$. Τότε πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα $G(\vec{y}_1,\cdots,\vec{x}_m)$ με το λ_1, και κάθε στοιχείο της δεύτερης στήλης με λ_2 και προσθέτουμε τις προκύπτουσες στήλες στην τρίτη στήλη του πίνακα $G(\vec{y}_1,\cdots,\vec{x}_m)$. Εκτελούμε τις ίδιες πράξεις με τις γραμμές του πίνακα $G(\vec{y}_1,\cdots,\vec{x}_m)$.

Έτσι, με τις παραπάνω πράξεις οι οποίες δεν αλλάζουν την ορίζουσα, τα διανύσματα $\vec{y}_3$ εμφανίζεται σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας όπου εμφανιζόταν τα $\vec{q}_3$, και επομένως θα έχουμε:

$$\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| \;=\; \mathsf{Det}\begin{pmatrix} \langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_1,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_1,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_1,\vec{x}_m\rangle \\ \langle\vec{y}_2,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_2,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_2,\vec{x}_m\rangle \\ \langle\vec{y}_3,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_3,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_3,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_3,\vec{x}_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\vec{x}_m,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{x}_m,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{x}_m,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{x}_m,\vec{x}_m\rangle \end{pmatrix}$$

(4) Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, αντικαθιστούμε, με στοιχειώδεις πράξεις οι οποίες δεν αλλάζουν την ορίζουσα, όλα τα διάνυσματα $\vec{x}_i$, $1 \le i \le m$, τα οποία εμφανίζονται ως (i,j)-στοιχεία $\langle\vec{x}_i,\vec{x}_j\rangle$ της ορίζουσας $\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right|$, με τα διανύσματα $\vec{y}_i$, $1 \le i \le m$, τα οποία προκύπτουν από τα $\vec{x}_i$, $1 \le i \le m$, με την διαδικασία Gram-Schmidt. Επομένως θα έχουμε:

$$\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| \;=\; \mathsf{Det}\begin{pmatrix} \langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_1,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_1,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_1,\vec{y}_m\rangle \\ \langle\vec{y}_2,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_2,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_2,\vec{y}_m\rangle \\ \langle\vec{y}_3,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_3,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_3,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_3,\vec{y}_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\vec{y}_m,\vec{y}_1\rangle & \langle\vec{y}_m,\vec{y}_2\rangle & \langle\vec{y}_m,\vec{y}_3\rangle & \cdots & \langle\vec{y}_m,\vec{y}_m\rangle \end{pmatrix} \;=\; \left|G(\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_m)\right|$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_m\}$ είναι ορθογώνιο, έπεται ότι:

$$\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| \;=\; \left|G(\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_m)\right| \;=\; \prod_{i=1}^{m}\langle\vec{y}_i,\vec{y}_i\rangle \;=\; \prod_{i=1}^{m}\|\vec{y}_i\|^2 \qquad \square$$

Πρόταση 11.5. *Έστω $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_m\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$, και έστω $\mathcal{T} = \{\vec{y}_1,\vec{y}_2,\cdots,\vec{y}_m\}$ το ορθογώνιο σύνολο το οποίο προκύπτει από το $\mathcal{S}$ με την διαδικασία Gram-Schmidt. Τότε:*

$$0 \;\le\; \left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| \;\le\; \|\vec{x}_1\|^2\,\|\vec{x}_2\|^2\,\cdots\,\|\vec{x}_m\|^2$$

Επιπλέον:

(1) $\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| = 0$ *αν και μόνον αν το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
(2) $\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| > 0$ *αν και μόνον αν το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
(3) $\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| \;=\; \|\vec{x}_1\|^2\,\|\vec{x}_2\|^2\,\cdots\,\|\vec{x}_m\|^2$ *αν και μόνον αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι ορθογώνιο.*

Απόδειξη. Από την σχέση (12.4) και την Πρόταση 12.4 έπεται ότι

$$\left|G(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_m)\right| = \left|G(\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_m)\right| = \|\vec{y}_1\|^2\cdot\|\vec{y}_2\|^2\cdot\;\cdots\;\cdot\|\vec{y}_m\|^2 \;\le\; \|\vec{x}_1\|^2\cdot\|\vec{x}_2\|^2\cdot\;\cdots\;\cdot\|\vec{x}_m\|^2$$

Άρα $0 \leq \left|G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)\right| \leq \|\vec{x}_1\|^2 \|\vec{x}_2\|^2 \cdots \|\vec{x}_m\|^2$. Οι ισχυρισμοί (1) και (2) αποδείχθηκαν στην Πρόταση 12.3.

Προφανώς αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι ορθογώνιο, τότε η παραπάνω ανισότητα είναι ισότητα. Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε με επαγωγή στο πλήθος m των διανυσμάτων και με χρήση της σχέσης (11.4), ότι αν η παραπάνω ανισότητα είναι ισότητα, τότε το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{S}$ είναι ορθογώνιο, □

11.3. **Όγκος Παραλληλεπιπέδου σε Ευκλείδειους Χώρους.** Έστω $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp} \qquad \text{(Ορθογώνιο Ευθύ Άθροισμα)}$$

και άρα κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$\vec{x} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) + \mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x})$$

όπου: $\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ και $\mathsf{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}^{\perp}$.

Ορισμός 11.6. *Έστω $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$.*

(1) *Το m-**διάστατο παραλληλεπίπεδο** του $\mathcal{E}$ το οποίο ορίζουν τα διανύσματα $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι το σύνολο*

$$\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} r_i \vec{x}_i \mid 0 \leq r_i \leq 1 \Big\}$$

(2) *Η **βάση** του παραλληλεπιπέδου $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ ορίζεται ως το $(n-1)$-διάστατο παραλληλεπίπεδο $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{m-1})$ το οποίο ορίζουν τα διανύσματα $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{m-1}\}$.*

(3) *Το **ύψος** του m-διάστατου παραλληλεπιπέδου $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ ορίζεται να είναι η κάθετη προβολή του διανύσματος $\vec{x}_m$ στον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{m-1})$ ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{m-1}$:*

$$\vec{\mathsf{h}}_m := \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{m-1})}(\vec{x}_m)$$

Παρατήρηση 11.7. *Έστω $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος είναι ο χώρος που εξετάζει η Αναλυτική Γεωμετρία. Τότε το 1-διάστατο παραλληλεπίπεδο το οποίο ορίζεται από το σύνολο $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1\}$ είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το $\vec{0}$ και από το τέλος του διανύσματος $\vec{x}_1$. Το 2-διάστατο παραλληλεπίπεδο το οποίο ορίζεται από το σύνολο $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$. Το 3-διάστατο παραλληλεπίπεδο το οποίο ορίζεται από το σύνολο $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, και $\vec{x}_3$.*

Παρατήρηση 11.8. *Από την Αναλυτική Γεωμετρία το εμβαδόν ενός παραλληλογράμου το οποίο ορίζουν δύο διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$, είναι το γινόμενο του μήκους του ενός από αυτά, π.χ. το $\vec{x}_1$ το οποίο θεωρούμε ως βάση, με το μήκος της καθέτου από το τέλος του $\vec{x}_2$ στην ευθεία στην οποία κείται το $\vec{x}_1$.*

Παρόμοια ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου το οποίο ορίζουν τρία διανύσματα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, και $\vec{x}_3$, είναι το γινόμενο του εμβαδού του παραλληλογράμμου το οποίο σχηματίζεται από δύο εκ των διανυσμάτων, π.χ. $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ τα οποία θεωρούνται ως βάση, με το μήκος της καθέτου από το τρίτο διάνυσμα $\vec{x}_3$ στο επίπεδο το οποίο ορίζουν τα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε να ορίσουμε τον όγκο ενός m-διάστατου παραλληλεπίπεδου ως εής:

Ορισμός 11.9. *Ο* **όγκος** $\mathsf{V}_m := \mathsf{V}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *του* m*-διάστατου παραλληλεπίπεδου του* $\mathcal{E}$ *το οποίο ορίζουν τα διανύσματα* $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ *του* $\mathcal{E}$ *ορίζεται επαγωγικά ως εξής:*

1. *Αν* $m = 1$*, τότε:*
$$\mathsf{V}_1 := \|\vec{x}_1\|$$
2. *Αν* $m = 2$*, τότε:*
$$\mathsf{V}_2 := \mathsf{V}_1 \cdot \|\vec{\mathsf{h}}_1\|$$
όπου:
$$\vec{\mathsf{h}}_1 = \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1)}(\vec{x}_2) \quad \text{και} \quad \mathsf{V}_1 = \text{ μήκος του} \vec{x}_1$$
3. *Αν* $m = 3$*, τότε:*
$$\mathsf{V}_3 := \mathsf{V}_2 \cdot \|\vec{\mathsf{h}}_2\|$$
όπου:
$$\vec{\mathsf{h}}_2 = \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}(\vec{x}_3) \quad \text{είναι η κάθετη προβολή του } \vec{x}_3 \text{ στο επίπεδο } \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$
και
$$\mathsf{V}_2 = \text{ εμβαδόν παραλληλογράμμου } \mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ το οποίο ορίζουν τα } \vec{x}_1, \vec{x}_2$$
$\vdots$

k. *Για* $1 \le k \le m$*:*
$$\mathsf{V}_k := \mathsf{V}_{k-1} \cdot \|\vec{\mathsf{h}}_{k-1}\|$$
όπου:
$$\vec{\mathsf{h}}_{k-1} = \mathsf{K}_{\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})}(\vec{x}_k) \quad \text{είναι η κάθετη προβολή του } \vec{x}_k \text{ στον υπόχωρο } \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1})$$
και
$$\mathsf{V}_{k-1} = \text{ όγκος παραλληλεπιπέδου } \mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}) \text{ το οποίο ορίζουν τα } \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{k-1}.$$

Παρατήρηση 11.10. *Όπως είναι φανερό από τον παραπάνω επαγωγικό ορισμό, ο όγκος* V_m *του* m*-διάστατου παραλληλεπιπέδου* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *είναι:*
$$\mathsf{V}_m = \|\vec{x}_1\| \cdot \|\vec{\mathsf{h}}_1\| \cdot \|\vec{\mathsf{h}}_2\| \cdot \ \cdots \ \cdot \|\vec{\mathsf{h}}_{m-1}\|$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (11.4)*, την Πρόταση* 11.5*, και το γεγονός ότι τα διανύσματα* $\vec{\mathsf{h}}_i$*,* $1 \le i \le m$ *προκύπτουν με βάση την διαδικασία Gram-Schmidt από τα διανύσματα* $\vec{x}_i$*,* $1 \le i \le m$*, θα έχουμε:*
$$(\mathsf{V}_m)^2 = \left|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)\right|$$

Ορισμός 11.11. *Έστω* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *το* m*-διάστατο παραλληλεπίπεδο το οποίο ορίζεται από τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ *του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$*.*

Το $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *καλείται* **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**, *αντίστοιχα* **ορθοκανονικό παραλληλεπίπεδο**, *αν το σύνολο διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ *είναι ορθογώνιο, αντίστοιχα ορθοκανονικό.*

Θεώρημα 11.12. *Έστω* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *το* m*-διάστατο παραλληλεπίπεδο το οποίο ορίζεται από τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ *του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$*. Τότε το τετράγωνο του όγκου του* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *είναι ίσο με την ορίζουσα Gram των διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$*. Άρα:*
$$\mathsf{V}_m = \pm\sqrt{\left|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)\right|}$$
Επιπλέον ο όγκος ενός m*-διάστατου παραλληλεπιπέδου είναι μικρότερος ή ίσος από το γινόμενο των μηκών των πλευρών του και είναι ίσος με αυτό αν και μόνον αν το παραλληλεπίπεδο είναι ορθογώνιο.*

Πόρισμα 11.13. *Έστω* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *το* m*-διάστατο παραλληλεπίπεδο το οποίο ορίζεται από τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ *του Ευκλείδειου χώρου* $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$.

(1) *Αν το παραλληλεπίπεδο* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *είναι ορθογώνιο, τότε:*

$$\mathsf{V}_m = \|\vec{x}_1\| \cdot \|\vec{x}_2\| \cdot \cdots \cdot \|\vec{x}_m\|$$

(2) *Αν το παραλληλεπίπεδο* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$ *είναι ορθοκανονικό, τότε:*

$$\mathsf{V}_m = 1$$

11.4. **Η Γεωμετρική Ερμηνεία της Ορίζουσας και η Ανισότητα του Hadamard.**

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι στήλες του A είναι οι συνιστώσες διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ διάστασης n, για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^n$. Έτσι θα έχουμε τα διανύσματα:

$$\vec{x}_1 := a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n$$

$$\vec{x}_2 := a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_n := a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n$$

Θεώρημα 11.14. *Έστω* A *ένας* $n \times n$ *πίνακας πραγματικών αριθμών. Τότε:*

$$\big|\mathsf{Det}(A)\big| = \mathsf{V}_n$$

όπου V_n *είναι ο όγκος του* n*-διάστατου παραλληλεπιπέδου* $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ *το οποίο σχηματίζεται από τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ *με συνιστώσες σε μια ορθοκανονκή βάση του* $\mathbb{R}^n$ *τις στήλες του* A.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = {}^tA \cdot A$$

και άρα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 11.12, θα έχουμε:

$$\mathsf{V}_n^2 = \mathsf{Det}\big(G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big) = \mathsf{Det}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Det}({}^tA) \cdot \mathsf{Det}(A) = \mathsf{Det}(A)^2$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 11.15. *Το παραπάνω Θεώρημα δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας, ακριβέστερα της απόλυτης τιμής της ορίζουσας, ενός τετραγωνικού* $n \times n$ *πίνακα* A *ως ο όγκος του* n*-διάστατου παραλληλεπιπέδου το οποίο σχηματίζεται από τα διανύσματα-στήλες του πίνακα, θεωρούμενες ως συνιστώσες διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ *σε μια ορθοκανονική βάση ενός* n*-διάστατου Ευκλείδειου χώρου* $\mathcal{E}$. *Όσον αφορά το πρόσημο αυτό ερμηνεύεται ως ο "προσανατολισμός" των διανυσμάτων αναφορικά με την ορθοκανονική βάση* $\mathcal{B}$ *του* $\mathcal{E}$.

Προχωρούμε με σκοπό να αποδείξουμε μια σημαντική ανισότητα του Hadamard η οποία δίνει μια εκτίμηση για την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα πραγματικών αριθμών.

Έστω $(\mathbb{R}_n, \langle , \rangle)$ ο Ευκλείδειος χώρος των στηλών πραγματικών αριθμών με n στοιχεία εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε ο A καλείται **θετικός** αν:

$$\langle A \cdot X, X\rangle \ > \ 0, \qquad \forall X \in \mathbb{R}_n, \quad X \neq 0$$

Ο πίνακας A καλείται **μη-αρνητικός** αν:

$$\langle A \cdot X, X\rangle \ \geq \ 0, \qquad \forall X \in \mathbb{R}_n$$

Λήμμα 11.16. *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Αν ο A είναι θετικός, αντίστοιχα μη-αρνητικός, τότε:*

$$a_{ii} > 0, \qquad \textit{αντίστοιχα} \quad a_{ii} \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα διανύσματα-στήλες της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}_n$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\langle A \cdot E_i, E_i\rangle = a_{ii}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Υπενθυμίζουμε το ακόλουθο θεμελιώδες

Θεώρημα 11.17 (Φασματικό Θεώρημα). *Αν $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε όλες οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ανήκουν στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακα P έτσι ώστε*

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Επιπλέον:

(1) *Ο A είναι θετικός $\iff$ ο A είναι αντιστρέψιμος $\iff$ $\lambda_i > 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$.*
(2) *Ο A είναι μη-αρνητικός $\iff$ $\lambda_i \geq 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$.*

Θεώρημα 11.18. *Αν $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι ένας θετικός συμμετρικός πίνακας, τότε:*

$$\mathsf{Det}(A) \ \leq \ \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 11.16 έπεται ότι τα διαγώνια στοιχεία a_{ii} του πίνακα A είναι θετικοί αριθμοί. Θέτουμε:

$$\kappa_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

και έστω ο διαγώνιος πίνακας

$$D = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_n \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$B := D \cdot A \cdot D$$

και παρατηρούμε ότι ο B είναι επίσης συμμετρικός και τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι όλα ίσα με 1:

$$b_{ii} = 1, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Επιπλέον ο πίνακας B είναι θετικός, διότι αν X είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα-στήλη, τότε:

$$\langle B \cdot X, X \rangle = \langle D \cdot A \cdot D \cdot X, X \rangle = \langle A \cdot (D \cdot X), {}^t D \cdot X \rangle = \langle A \cdot (D \cdot X), D \cdot X \rangle \ > \ 0$$

διότι ο A είναι θετικός και προφανώς $D \cdot X \neq 0$.

Για την ορίζουσα του B θα έχουμε:

$$\mathsf{Det}(B) = \mathsf{Det}(D \cdot A \cdot D) = \mathsf{Det}(D)^2 \cdot \mathsf{Det}(A) = \mathsf{Det}(D^2) \cdot \mathsf{Det}(A) = (\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}})^2 \cdot \mathsf{Det}(A) = \frac{\mathsf{Det}(A)}{\prod_{i=1}^n a_{ii}}$$

Άρα για να αποδείξουμε το Θεώρημα, αρκεί να δείξουμε ότι: $\mathsf{Det}(B) \leq 1$. Έστω

$$F = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$$

η διαγώνια μορφή του συμμετρικού πίνακα B, όπου $\mu_1, \cdots, \mu_n$ είναι οι ιδιοτιμές του B, οι οποίες είναι θετικοί αριθμοί, όπως προκύπτει από το Φασματικό Θεώρημα, διότι ο B είναι θετικός.

Από την, εύκολα αποδεικνυόμενη σχέση, θετικών πραγματικών αριθμών:

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \ \leq \ \sum_{i=1}^n (\frac{\mu_i}{n})^n$$

θα έχουμε:

$$\mathsf{Det}(B) \ = \ \mathsf{Det}(F) \ = \ \prod_{i=1}^n \mu_i \ \leq \ \sum_{i=1}^n (\frac{\mu_i}{n})^n \ \leq \ \left(\frac{\mathsf{Tr}(B)}{n}\right)^n = (\frac{n}{n})^n = 1$$

διότι, καθώς όλα τα διαγώνια στοιχεία του B είναι ίσα με 1, έπεται ότι $\mathsf{Tr}(B) = n$. Άρα $\mathsf{Det}(B) \ \leq \ 1$ και επομένως:

$$\mathsf{Det}(A) \ \leq \ \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

□

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ανισότητα του Hadamard:

Θεώρημα 11.19 (Ανισότητα Hadamard). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Τότε:*

$$\mathsf{Det}(A) \leq \sqrt{\prod_{j=1}^{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Απόδειξη. Αν $\mathsf{Det}(A) = 0$, τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα.

Υποθέτουμε ότι $\mathsf{Det}(A) \neq 0$, και θεωρούμε τον πίνακα $T = (t_{ij})$, όπου $T := {}^tA \cdot A$. Τότε προφανώς ο T είναι συμμετρικός, και αντιστρέψιμος διότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Επομένως από το Φασματικό Θεώρημα έπεται ότι T είναι θετικός. Τότε από το Θεώρημα 11.18, θα έχουμε:

$$\mathsf{Det}(T) \leq \prod_{j=1}^{n} t_{jj}$$

Όμως προφανώς:

$$t_{jj} = (T)_{jj} = ({}^tA \cdot A)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

και επομένως:

$$\mathsf{Det}(T) \leq \prod_{j=1}^{n} t_{jj} = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

Επειδή $\mathsf{D}(T) = \mathsf{Det}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Det}(A^2) = \mathsf{Det}(A)^2$, θα έχουμε:

$$\mathsf{Det}(A)^2 = \mathsf{Det}(T) \leq \prod_{j=1}^{n} t_{jj} = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Προφανώς η ισότητα στην Ανισότητα Hadamard ισχύει όταν ο πίνακας είναι διαγώνιος.

Ώς άμεση συνέπεια της Ανισότητας Hadamard, έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 11.20. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Αν $|a_{ij}| \leq \varepsilon,\ 1 \leq i, i \leq n$, τότε:*

$$\mathsf{Det}(A) \leq \varepsilon^n \cdot n^{\frac{n}{2}}$$

Πόρισμα 11.21. *Από όλα τα n-διάστατα παραλληλεπίπεδα $\mathcal{P}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$ με δεδομένο μήκος $\|\vec{x}_i\|$ διανυσμάτων πλευρών, εκείνο με τον μεγαλύτερο όγκο είναι το ορθογώνιο.*

Παράδειγμα 11.22. *Θωρούμε τον 4×4 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Τότε θέτοντας $\varepsilon = 2$, από το Πόρισμα 11.20 θα έχουμε $\mathsf{Det}(A) \leq 2^4 \cdot 4^{\frac{4}{2}} = 16 \cdot 16 = 256$. Πραγματικά: $\mathsf{Det}(A) = 12$.

Παράδειγμα 11.23. *Θωρούμε τον* 3×3 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Τότε θέτοντας $\varepsilon = 5$, *από το Πόρισμα* 11.20 *θα έχουμε* $\mathsf{Det}(A) \leq 5^3 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ *που είναι περίπου* 156. *Πραγματικά:* $\mathsf{Det}(A) = 50$.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης