ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Ισομετρίες

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

12. Ισομετρίες

12.1. **Χαρακτηρισμός Ισομετριών.** Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 12.1. *Μια, όχι κατ' ανάγκην γραμμική, απεικόνιση $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται* **ισομετρία** *αν η f διατηρεί αποστάσεις, δηλαδή:*

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \;=\; \|\vec{x} - \vec{y}\|, \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$$

Μια απεικόνιση $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **μεταφορά**, κατά το διάνυσμα $\vec{a}$, αν:

$$g(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}, \qquad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Την μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{a}$ θα την συμβολίζουμε με $g_{\vec{a}}$.

Προφανώς κάθε μεταφορά είναι ισομετρία. Στην παρούσα παράγραφο με τον όρο ισομετρία θα ενοούμε ισομετρία με την έννοια του ορισμού 12.1.

Θεώρημα 12.2. (1) *Κάθε ισομετρία $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μπορεί να γραφεί μοναδικά ως σύνθεση μιας μεταφοράς $g_{\vec{a}}$ και μιας ισομετρίας h η οποία στέλνει το $\vec{0}$ στο $\vec{0}$:*

$$f = g_{\vec{a}} \circ h, \qquad \eta \qquad h \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{είναι ισομετρία} \qquad \text{και} \qquad h(\vec{0}) = \vec{0}$$

δηλαδή: $f(\vec{x}) = h(\vec{x}) + \vec{a}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
   (α') *Η $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία και: $f(\vec{0}) = \vec{0}$.*
   (β')
$$\langle\, f(\vec{x}), f(\vec{y})\,\rangle \;=\; \langle\, \vec{x}, \vec{y}\rangle, \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$$
   Ιδιαίτερα: $\|f(\vec{x})\| \;=\; \|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

(3) *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία. Αν $f(\vec{0}) = \vec{0}$ και $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$, τότε: $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.*

Απόδειξη. □

Θεώρημα 12.3. *Κάθε ισομετρία $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ για την οποία ισχύει ότι $f(\vec{0}) = \vec{0}$, είναι γραμμική απεικόνιση, και επομένως είναι ένας ισομορφισμός.*

Απόδειξη. □

Πόρισμα 12.4. *Για μια απεικόνιση $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι ισομετρία και $f(\vec{0}) = \vec{0}$.*
(2) *Η f είναι γραμμική ισομετρία.*

Θεώρημα 12.5. (1) *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{a} \in \mathcal{E}$ και μια γραμμική ισομετρία $h \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f = g_{\vec{a}} \circ h$$

(2) *Αντίστροφα κάθε απεικόνιση της παραπάνω μορφής είναι ισομετρία.*

Πόρισμα 12.6. *Έστω $f\colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ μια απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι ισομετρία.*

(2) *Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα-στήλη $Y \in \mathbb{R}_n$ και μοναδικός ορθογώνιος πίνακας A έτσι ώστε:*

$$f(X) = A \cdot X + Y, \qquad \forall X \in \mathbb{R}_n$$

12.2. **Κανονική μορφή Ορθογωνίων Πινάκων.** Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = n \geq 2$.

Συμβολισμός: Υπενθυμίζουμε ότι ένα ευθύ άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k$ υπόχωρων καλείται **ορθογώνιο ευθύ άθροισμα** αν οι υπόχωροι $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq k$ είναι ανά δύο ορθογώνιοι, δηλαδή:

$$\mathcal{V}_i \perp \mathcal{V}_j, \qquad 1 \leq i \neq j \leq k$$

με άλλα λόγια: $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0,\ \forall \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i,\ \forall \vec{x}_j \in \mathcal{V}_j$.

Σ' αυτή την περίπτωση θα γράφουμε το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα ως εξής: $\mathcal{V}_1 \boxplus \mathcal{V}_2 \boxplus \cdots \boxplus \mathcal{V}_k$.

Από τώρα και στο εξής: με τον όρο ισομετρία θα εννούμε γραμμική ισομετρία.

Θεώρημα 12.7. *Αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια ισομετρία, τότε:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \boxplus \mathcal{V}_2 \boxplus \cdots \boxplus \mathcal{V}_k$$

όπου κάθε υπόχωρος $\mathcal{V}_i$ είναι f-αναλλοίωτος, δηλαδή: $f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i$, και $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 1$ ή 2.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση επαγωγής σε κάποια βήματα.

Βήμα 1: Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{E}$ έχει έναν f-αναλλοίωτο υπόχωρο $\mathcal{V}$ με $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 1$ ή 2.

Απόδειξη: Έστω $P_f(t)$ το χαρακτηρσιτικό πολυώνυμο της f. Επειδή τα μόνα ανάγωγα πολυώνυμα με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ είναι βαθμού 1 ή 2, έπεται ότι μπορούμε να γράψουμε το $P_f(t)$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων

$$P_f(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \ \cdots \ \cdot P_k(t) \qquad\qquad \deg P_i(t) = 1 \text{ ή } 2$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton, θα έχουμε $P_f(f) = 0$, και άρα $P_f(f)(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

□

Θεώρημα 12.8. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας της f στην $\mathcal{B}$ να είναι της μορφής:*

$$A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & A_k \end{pmatrix} \qquad (*)$$

όπου:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) & \sin(\varphi_i) \\ -\sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq k-2$$

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathsf{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$$

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathsf{M}_{s\times s}(\mathbb{R})$$

$$2(k-2) + r + s = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$$

Ιδιαίτερα κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής $(*)$.

12.3. **Ανακλάσεις.** Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε με ανακλάσεις οι οποίες είναι ειδικού τύπου ισομετρίες.

Ορισμός 12.9. *Μια γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *καλείται* **ανάκλαση** *αν υπάρχει ένα υπερεπίπεδο* $\mathcal{H}$ *του* $\mathcal{E}$, *το* **υπερεπίπεδο ανάκλασης**, *δηλαδή ένας υπόχωρος* $\mathcal{H}$ *του* $\mathcal{E}$ *διάστασης* $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H} = n-1$, *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{H} \qquad \text{και} \qquad f(\vec{x}) = -\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{H}^{\perp}$$

Πρόταση 12.10. *Έστω* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια ανάκλαση ως προς ένα υπερεπίπεδο* $\mathcal{H}$ *του* $\mathcal{E}$. *Τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα* $\vec{v} \in \mathcal{H}^{\perp}$, *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,\frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{x} \,\in\, \mathcal{E}$$

Αν $\vec{w} \in \mathcal{H}^{\perp}$ *είναι ένα άλλο διάνυσμα έτσι ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση, τότε* $\vec{w} = \lambda\vec{v}$, *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. □

Σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση, μια ανάκλαση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ προσδιορίζεται από ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} \in \mathcal{E}$, δηλαδή είναι της μορφής $f = f_{\vec{v}}$, όπου

$$f_{\vec{v}} \,:\, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad f_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,\frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{x} \,\in\, \mathcal{E}$$

και τότε το υπερεπίπεδο ανάκλασης είναι: $\mathcal{H} = \vec{v}^{\perp}$.

Πρόταση 12.11. *Κάθε ανάκλαση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομετρία και αυτοπροσαρτημένη. Ιδιαίτερα* $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ *και υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\mathcal{B}$ *του* $\mathcal{E}$ *στην οποία ο πίνακας της* f *είναι της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη. □

Λήμμα 12.12. *Έστω* $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathcal{E}$ *δύο διανύσματα του* $\mathcal{E}$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.

(2) *Υπάρχει μια ανάκλαση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *έστι ώστε:* $f(\vec{v}) = \vec{w}$.

Επιπλέον $f(\vec{w}) = \vec{v}$, *και αν* $\vec{v} \neq \vec{0} \neq \vec{w}$, *τότε η ανάκλαση* f *για την οποία ισχύει* $f(\vec{v}) = \vec{w}$ *είναι μοναδική και ίση με την ανάκλαση:*

$$f = f_{\vec{v}-\vec{w}}$$

Απόδειξη. □

Θεώρημα 12.13 (Cartan-Dieudonné)**.** *Αν* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε τα ακόλυθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η* f *είναι ισομετρία.*
(2) *Η* f *είναι σύνθεση* k *το πλήθος ανακλάσεων, δηλαδή υπάρχουν μη-μηδενικά διανύσματα* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k$, $1 \leq k \leq n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$, *έτσι ώστε:*

$$f = f_{\vec{v}_1} \circ f_{\vec{v}_1} \circ \cdots \circ f_{\vec{v}_k}$$

Απόδειξη. □

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.

Σημείωμα Αδειοδότησης