ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Παραγοντοποιήσεις Πινάκων και Γραμμικών Απεικονίσεων

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

13. **Παραγοντοποιήσεις Πινάκων και Γραμμικών Απεικονίσεων**

13.1. **Η Παραγοντοποίηση QR ενός πίνακα.** Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Στην παρούσα παράγραφο, με χρήση της διαδικασίας Gram-Schmidt θα δείξουμε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ενός ορθογώνιου πίνακα και ενός άνω τριγωνικού πίνακα ο οποίος έχει θετικούς αριθμούς στην διαγώνιό του.

Θεώρημα 13.1. *Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Τότε υπάρχουν:*

(1) *ένας ορθογώνιος πίνακας Q, και*
(2) *ένας άνω τριγωνικός πίνακας R όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του οποίου είναι θετικοί αριθμοί,*

έτσι ώστε:

$$A = Q \cdot R$$

και η παραπάνω παραγοντοποίηση είναι μοναδική. Δηλαδή αν $A = Q_1 \cdot R_1$, όπου Q_1 είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, και R_1 είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας R όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του οποίου είναι θετικοί αριθμοί, τότε: $Q = Q_1$ και $R = R_1$.

Απόδειξη. Έστω

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq j \leq n$$

η j-στήλη του πίνακα A. Τότε ο πίνακας A ορίζει το σύνολο διανυσμάτων

$$\Big\{\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \cdots,\ \Sigma_n\Big\}$$

του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}_n, \langle,\rangle)$. Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι οι στήλες του $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}_n$. Έστω

$$Q_j = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ q_{2j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq j \leq n$$

το σύνολο διανυσμάτων το οποίο προκύπτει από το σύνολο των στηλών του A με την διαδικασία Gram-Schmidt. Ως γνωστόν τότε το διάνυσμα Q_j είναι γραμμικός συνδυασμός των $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_j$, και έτσι θα έχουμε, βλέπε εδάφιο 11.2, ότι το σύνολο :

$$Q_1 = c_{11}\Sigma_1$$

$$Q_2 = c_{12}\Sigma_1 + c_{22}\Sigma_2$$

$$\vdots$$

$$Q_n = c_{1n}\Sigma_1 + c_{2n}\Sigma_2 + \cdots + c_{nn}\Sigma_n$$

είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}_n$, και $c_{jj} \neq 0,\ 1 \leq j \leq n$. Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν με μορφή πινάκων ως εξής:

$$\Big(Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_n\Big) \ = \ \Big(\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \cdots,\ \Sigma_n\Big) \ \cdot \ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Επειδή $c_{jj} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και τότε ο αντίστροφός του

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

θα είναι άνω τριγωνικός. Έτσι θα έχουμε:

$$\Big(\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \cdots,\ \Sigma_n\Big) \ = \ \Big(Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_n\Big) \ \cdot \ \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

και $d_{jj} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$. Τότε θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{gathered} \Sigma_1 = d_{11}Q_1 \\ \Sigma_2 = d_{12}Q_1 + d_{22}Q_2 \\ \vdots \\ \Sigma_n = d_{1n}Q_1 + d_{2n}Q_2 + \cdots + d_{nn}Q_n \end{gathered}$$

Αν κάποιο από τα d_{jj} είναι < 0, τότε πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη Q_j με το -1 και έτσι χωρίς να επηρεάζεται η ορθοκανονικότητα του συνόλου $\Big\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\Big\}$, μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις ως εξής:

$$\begin{gathered} \Sigma_1 = r_{11}Q'_1 \\ \Sigma_2 = r_{12}Q'_1 + r_{22}Q'_2 \\ \vdots \\ \Sigma_n = r_{1n}Q'_1 + r_{2n}Q'_2 + \cdots + r_{nn}Q'_n \end{gathered}$$

όπου

$$r_{11},\ r_{22},\ \cdots,\ r_{nn} \ > \ 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται με μορφή πινάκων:

$$\Big(\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \cdots,\ \Sigma_n\Big) \ = \ \Big(Q'_1,\ Q'_2,\ \cdots,\ Q'_n\Big) \ \cdot \ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ή ισοδύναμα:

$$A = Q \cdot R$$

όπου

$$Q = \Big(Q'_1,\ Q'_2,\ \cdots,\ Q'_n\Big) \qquad \text{και} \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

η οποία είναι η ζητούμενη παραγοντοποίηση, διότι ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος επειδή οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_n$, και ο πίνακας R είναι άνω τριγωνικός με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο.

Έστω $P = (p_{ij})$ ένας ορθογώνιος πίνακας και $S = (s_{ij})$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο, έτσι ώστε: $A = P \cdot S$. Τότε επειδή οι πίνακας R είναι αντιστρέψιμος, θα έχουμε:

$$Q \cdot R = P \cdot S \qquad \Longrightarrow \qquad P^{-1} \cdot Q = S \cdot R^{-1}$$

Επειδή οι πίνακες P^{-1} και Q είναι ορθογώνιοι, έπεται ότι και ο πίνακας $P^{-1} \cdot Q$ θα είναι ορθογώνιος. Άρα ο πίνακας $S \cdot R^{-1}$ ορθογώνιος. Όμως ο πίνακας $S \cdot R^{-1}$ είναι άνω τριγωνικός (ως γινόμενο άνω τριγωνικών πινάκων). Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα ο μόνος ορθογώνιος και άνω τριγωνικός πίνακας με θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο είναι ο μοναδιαίος, έπεται ότι $S \cdot R^{-1} = I_n$ και άρα $S = R$. Τότε προφανώς $Q = P$. □

Παρατήρηση 13.2. *Η παραγοντοποίηση QR ενός αντιστρέψιμου πίνακα χρησιμοποιείται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων: Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}$ και έχτω το γραμμικό σύστημα*

$$A \cdot X = B$$

Έστω $A = Q \cdot R$, όπου Q είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή $Q^{-1} = {}^tQ$, και R είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο. Τότε θα έχουμε το σύστημα

$$Q \cdot R \cdot X = B \qquad \Longrightarrow \qquad R \cdot X = {}^tQ \cdot B$$

το οποίο είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \cdot \\ b'_n \end{pmatrix}$$

όπου στα δεξιά είναι ο πίνακας-στήλη ${}^tQ \cdot B$, και το οποίο επιλύεται εύκολα διότι ο πίνακας R είναι άνω τριγωνικός και $r_{jj} > 0$, $1 \leq j \leq n$. Για παράδειγμα

$$x_n = \frac{r_{nn}}{b'_n}, \qquad x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}}\big(b'_{n-1} - r_{n-1,n}\frac{r_{nn}}{b'_n}\big), \qquad \cdots$$

Παρατήρηση 13.3. *Η παραγοντοποίηση QR, χωρίς την μοναδικότητα, ισχύει και για μη-τετραγωνικούς (και ιδιαίτερα και για μη-αντιστρέψιμους) πίνακες:*

Κάθε πίνακας $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο

$$A = Q \cdot R$$

όπου $Q \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι ένας πίνακας του οποίου οι στήλες αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο, και $R \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-αρνητικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 13.1.

13.2. **Πολική Ανάλυση.** Έστω $z \in \mathbb{C}$ ένας μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Τότε ως γνωστόν ο z μπορεί να γραφεί ως:

$$z = r \cdot e^{i\theta}, \qquad r > 0, \qquad |e^{i\theta}| = 1$$

Διαφορετικά: $z = r \cdot w$, όπου $w = \frac{z}{|z|}$ και $r = |z|$.

Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε μια ανάλογη παραγοντοποίηση για γραμμικές απεικονίσεις σε Ευκλείδειους χώρους.

Θεώρημα 13.4. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση. Τότε η f μπορεί να γραφεί μοναδικά ως:*

$$f = g \circ h$$

όπου:

(1) *Η γραμμική απεικόνιση $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι αυτοπροσαρτημένη και θετική.*
(2) *Η γραμμική απεικόνιση $h \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι ισομορφισμός. Τότε όπως γνωρίζουμε η αυτοπροσαρτημένη της f^* είναι επίσης ισομορφισμός και ισχύει $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$f \circ f^* \, : \, \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

η οποία είναι θετική διότι, $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$:

$$\langle f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle f(f^*(\vec{x})), \vec{x} \rangle = \langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \rangle = \| f^*(\vec{x}) \|^2 > 0$$

και η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $\|f^*(\vec{x})\|^2 \geq 0$ και $\|f^*(\vec{x})\|^2 = 0$ αν και μόνον αν $f^*(\vec{x}) = 0$ και άρα αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$ το οποίο είναι άτοπο διότι $\vec{x} \neq 0$. Άρα:

$$f \circ f^* \, > \, 0$$

Επειδή όπως γνωρίζουμε κάθε θετική γραμμική απεικόνιση έχει μια μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα, έπεται ότι υπάρχει μοναδική αυτοπροσαρτημένη θετική γραμμική απεικόνιση $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f \circ f^* = g^2$$

Επειδή κάθε θετική γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός, μπορούμε να Θεωρήσουμε τότε την γραμμική απεικόνιση

$$h := g^{-1} \circ f$$

και άρα

$$h^* = (g^{-1} \circ f)^* = f^* \circ (g^{-1})^* = f^* \circ (g^*)^{-1} = f^* \circ g^{-1}$$

και επομένως

$$h \circ h^* = h \circ f^* \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f \circ f^* \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g^2 \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$$

το οποίο δείχνει ότι η h είναι ισομετρία. Επειδή $h := g^{-1} \circ f$ θα έχουμε $f = g \circ h$, όπου η g είναι αυτοπροσαρτημένη θετική γραμμική απεικόνιση και η h είναι ισομετρία.

Για την μοναδικότητα: έστω $f = g_1 \circ h_1$, όπου η g_1 είναι θετική αυτοπροσαρτημένη και η h_1 είναι ισομετρία. Τότε χρησιμοποιώντας ότι η h_1 είναι ισομετρία, θα έχουμε:

$$f^* = (g_1 \circ h_1)^* = h_1^* \circ g_1^* = h_1^* \circ g_1 \implies g^2 = f \circ f^* = f \circ h_1^* \circ g_1 = g_1 \circ h_1 \circ h_1^* \circ g_1 = g_1^2$$

Επομένως $g^2 = g_1^2$ και άρα $g = \sqrt{g^2} = \sqrt{g_1^2} = g_1$, λόγω της μοναδικότητας της θετικής τετραγωνικής ρίζας θετικής αυτοπροσαρτημένης γραμμικής απεικόνισης. Τέλος θα έχουμε:

$$h = g^{-1} \circ f = g_1^{-1} \circ f = h_1$$

□

Πόρισμα 13.5. *Κάθε αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών A γράφεται μοναδικά ως:*

$$A = B \cdot C$$

όπου:

(1) *Ο πίνακας B είναι συμμετρικός και θετικός.*
(2) *Ο πίνακας C είναι ορθογώνιος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Από το παραπάνω Θεώρημα η f_A γράφεται μοναδικά ως:

$$f_A = g \circ h$$

όπου $g\colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ είναι είναι συμμετρικός και θετικός, και η $h\colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ είναι ισομετρία. Τότε θεωρώντας πίνακες στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_n$ η οποία είναι ορθοκανονική, θα έχουμε $A = B \cdot C$, διότι $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A = A$, και ο πίνακας B της αυτοπροσαρτημένης θετικής γραμμικής απεικόνισης g είναι συμμετρικός και θετικός, και ο πίνακας C της ισομετρίας h είναι ορθογώνιος. □

Πρόταση 13.6. *Έστω $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο αυτοπροσαρτημένες θετικές γραμμικές απεικονίσεις, και έστω $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία. Υποθέτουμε ότι:*

$$f = g \circ h \qquad \text{ή} \qquad f = h \circ g$$

Τότε $h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ και $f = g$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι: $f = g \circ h$. Επειδή οι f, g είναι θετικές, έπεται ότι f, g είναι αντιστρέψιμες. Τότε:

$$f = g \circ h \qquad \Longrightarrow \qquad h = g^{-1} \circ f$$

και επομένως χρησιμοποιώντας οτι οι f, g είναι αυτοπροσαρτημένες, θα έχουμε:

$$h^* = (g^{-1} \circ f)^* = f^* \circ (g^{-1})^* = f \circ (g^*)^{-1} = f \circ g^{-1}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας ότι η h είναι ισομετρία, θα έχουμε $h^* \circ h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ και άρα

$$h^* = h^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ g^{-1} = (g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g \qquad \Longrightarrow \qquad f^2 = g^2$$

Λόγω της μοναδικότητας της θετικής τετραγωνικής ρίζας αυτοπροσαρτημένων θετικών γραμμικών απεικονίσεων, θα έχουμε $f = g$ και άρα $h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Παρόμοια εργαζόμαστε αν $f = h \circ g$. □

Θα δείξουμε τώρα ότι το Θεώρημα 13.4 ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση f, όχι κατ' ανάγκην αντιστρέψιμη.

Θεώρημα 13.7. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση. Τότε η f μπορεί να γραφεί ως:*

$$f = g \circ h$$

όπου:

(1) *Η γραμμική απεικόνιση $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι αυτοπροσαρτημένη και μη-αρνητική.*
(2) *Η γραμμική απεικόνιση $h\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι δεν είναι ισομορφισμός. Τότε η γραμμική απεικόνιση $f \circ f^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι αυτοπροσαρτημένη και μη-αρνητική, και άρα έχει μια μοναδική μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, δηλαδή έτσι ώστε:

$$f \circ f^* = g^2$$

Τότε

$$\|g(\vec{x})\|^2 = \langle g(\vec{x}, g(\vec{x})\rangle = \langle \vec{x}, g^*(g(\vec{x}))\rangle = \langle \vec{x}, g^2(\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}, (f \circ f^*)(\vec{x})\rangle = \langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x}\rangle =$$
$$= \langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x})\rangle = \|f^*(\vec{x})\|^2$$

Ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση

$$\widetilde{h} : \mathsf{Im}(g) \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \widetilde{h}(g(\vec{x})) := f^*(\vec{x})$$

Η $\widetilde{h}$ είναι καλά ορισμένη διότι αν $g(\vec{x}), g(\vec{y}) \in \mathsf{Im}(g)$ και $g(\vec{x}) = g(\vec{y})$, τότε θα έχουμε:

$$\|g(\vec{x})\|^2 = \|g(\vec{y})\|^2 \implies \|f^*(\vec{x})\|^2 = \|f^*(\vec{y})\|^2 \implies \|f^*(\vec{x} - \vec{y})\| = 0 \implies f^*(\vec{x}) = f^*(\vec{y})$$

Επομένως έχουμε μια ισομετρία $\widetilde{h}\colon \mathsf{Im}(g) \longrightarrow \mathcal{E}$. □

13.3. **Ορθογώνια Τριγωνοποίηση.** Όπως γνωρίζουμε, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ο οποίος έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$, είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα: υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.

Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε το ακόλουθο Θεώρημα δείχνει ότι ο πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Θεώρημα 13.8 (Θεώρημα του Schur). *Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας πραγματικών αριθμών ο οποίος έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας:*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \text{είναι άνω τριγωνικός}$$

Απόδειξη. □

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.

Σημείωμα Αδειοδότησης