Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

21 - 3 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ 3x+2y+z=0\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x+4y+3z=0\big\}$$

Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. *Αν αυτό δεν ισχύει να βρείτε υπόχωρους* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *έτσι ώστε* $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$.

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{V} = \big\langle(1,2,1,-1),\ (1,1,1,1)\big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle(-1,1,-1,1),\ (0,1,0,1)\big\rangle$$

(1) *Είναι το άθροισμα* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ *ευθύ;*
(2) *Πόσοι υπόχωροι* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *υπάρχουν έτσι ώστε* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$*; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.*

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{C}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}^3$ *:*

$$\mathcal{V} = \big\langle(1,1,0),\ (i,1+i,1),\ (1+i,1+i,0)\big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle(1,0,1),\ (i,-i,0),\ (0,i,i)\big\rangle$$

Να βρείτε υπόχωρο $\mathcal{U}$ *του* $\mathbb{C}^3$ *έτσι ώστε* $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} = \mathbb{C}^3$.

Άσκηση 4. *Να εξετάσετε αν ισχύει ότι:* $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$*, όπου* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι οι ακόλουθοι υπόχωροι του* $\mathbb{R}_3[t]$*:*

$$\mathcal{V} = \big\langle 1, t+t^2,\ 2+3t+3t^2\big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle t,\ t^3\big\rangle$$

Άσκηση 5. *Να δείξετε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν* $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_n$ *είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$*, και ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}, \quad \forall i,j = 1,\cdots,n,\ \ i \neq j$$

τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$ *είναι ευθύ.*

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\mathcal{W}_1 = \{(t,2t,-t,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{W}_2 = \{(t,s,t-3s,-s) \in \mathbb{R}^4 \mid t,s \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{W}_3 = \{(t,s,0,r) \in \mathbb{R}^4 \mid t-2s+r=0\}$$

(1) *Να δείξετε ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^4$ *και να βρεθεί η διάσταση τους.*
(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ *είναι ευθύ.*
(3) *Να δείξετε ότι* $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

Άσκηση 7. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση.*

(1) *Αν* $f^2 = f$, *να δείξετε ότι* $\mathcal{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(2) *Αν* $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, *να δείξετε ότι* $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ *όπου:*

$$\mathcal{V}_1 = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\big\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{V}_2 = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\big\}$$

Άσκηση 8. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(1) *Αν* $A^2 = A$, *να δείξετε ότι ο* A *είναι όμοιος με τον πίνακα:*

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{(n-r)\times(n-r)} & \mathbb{O}_{r\times(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)\times r} & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου I_r *είναι ο μοναδιαίος* $r \times r$ *πίνακας και* $r = \mathbf{r}(A)$.

(2) *Αν* $A^2 = I_n$, *να δείξετε ότι ο* A *είναι όμοιος με τον πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & \mathbb{O}_{r\times(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)\times r} & -I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου r *είναι η διάσταση του υπόχωρου* $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\}$ *του* $\mathbb{K}_n$.

Άσκηση 9. *Έστω ότι* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_m$ *είναι υπόχωροι ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$. *Θεωρούμε τον* $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$ *και ορίζουμε μια απεικόνιση*

$$f : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m$$

(1) *Να δείξετε ότι η* f *είναι γραμμική.*

(2) *Ποιά είναι η εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ *της* f;

(3) *Να δείξετε ότι η* f *είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν το άθροισμα* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *είναι ευθύ.*

(4) *Να δείξετε ότι η* f *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν* $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$.

Άσκηση 10. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *είναι* $\mathbb{K}$*-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η* f *είναι επιμορφισμός.*

(1) *Να δείξετε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση* $g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:* $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.

(2) *Να δείξετε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$$