Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

28 - 3 - 2012

Άσκηση 1. (1) *Να εφαρμόσετε την Ευκλείδεια διαίρεση στα πολυώνυμα* $P(t) = 9t^6 + 4t^3 + 1$ *και* $Q(t) = t^2 + 2t + 3$.

(2) *Βρείτε τις ρίζες των πολυωνύμων* $t^3 - t^2 + 2t - 2$ *και* $t^2 - 2$ *εξετάζοντας τους διαιρέτες των σταθερών όρων.*

(3) *Δίνεται το πολυώνυμο* $P(t) = t^4 - 7t^3 + 18t^2 - 20t + 8$. *Να βρείτε τις ρίζες του και την πολλαπλότητα κάθε ρίζας.*

Άσκηση 2. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$, *και* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathcal{E}$. *Έστω* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$ *δύο ιδιοδιανύσματα του* f *τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του* f.

Αν $a, b \in \mathbb{K}$ *και* $ab \neq 0$, *να δείξετε ότι το διάνυσμα* $a\vec{x} + b\vec{y}$ *δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της* f.

Άσκηση 3. *Βρείτε τις ιδιοτιμές καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον ακόλουθο ενδομορφισμό του* $\mathbb{R}$-*διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + y, y - z)$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές του f *καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους.*

Άσκηση 5. *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 6. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 7. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του ενδομορφισμού*

$$f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad P(t) \longmapsto f(P(t)) = P(t) - P'(t) .$$

Άσκηση 8. *Αν* λ *είναι μια ιδιοτιμή ενός ενδομορφισμού* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ή ενός πίνακα* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, να δείξετε ότι το* λ^m *είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού* f^m *ή του πίνακα* A^m *αντίστοιχα,* $\forall m \geq 1$*. Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων* $\mathcal{V}_f(\lambda)$ *και* $\mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$ *ή των ιδιοχώρων* $\mathcal{V}_A(\lambda)$ *και* $\mathcal{V}_{A^m}(\lambda^m)$ *αντίστοιχα;*

Άσκηση 9. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$*. Αν ο* f *είναι ισομορφισμός, να δείξετε ότι το* $\lambda \in \mathbb{K}$ *είναι ιδιοτιμή του* f *αν και μόνον αν το* λ^{-1} *είναι ιδιοτιμή του* f^{-1}*. Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων* $\mathcal{V}_f(\lambda)$ *και* $\mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$*;*