Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

4 - 4 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τη γραμμική απεινόνιση*

$$f \;:\; \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \;\; (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x-y,\; x+y,\; y-z)$$

Είναι η f διαγωνοποιήσιμη; Αν ναι να διαγωνοποιηθεί.

Άσκηση 2. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Να βρεθεί ο πίνακας $A^m, \forall\, m \geq 1$.

Άσκηση 4. *Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 3 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 4 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Να δειχθεί ότι: $A^{593} - 2A^{15} = -A$.

Άσκηση 6. *Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \mu \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 7. *Να δείξετε ότι οι πίνακες*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

Άσκηση 8. *Να βρεθεί ένας* 3×3*-πίνακας* A *για τον οποίο τα διανύσματα στήλες*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A *με αντίστοιχες ιδιοτιμές* $1, 2$ *και* 3.

Άσκηση 9. (1) *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$.
- (α') *Αν* $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, *να δείξετε ότι η* f *είναι διαγωνοποιήσιμη.*
- (β') *Αν* $f^2 = f$, *να δείξετε ότι η* f *είναι διαγωνοποιήσιμη.*

(2) *Έστω* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- (α') *Αν* $A^2 = I_n$, *να δείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*
- (β') *Αν* $A^2 = A$, *να δείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Άσκηση 10. *Έστω* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *και* $(z_n)_{n\geq 0}$ *ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συνδέονται με τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις,* $\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} - 3y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n &= 2x_{n-1} + 4y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι ακολουθίες, αν γνωρίζουμε ότι : $x_0 = 2,\ y_0 = 3,\ z_0 = 1$.