ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Θεωρία Ομάδων

Ενότητα: Ευθέα Γινόμενα Ομάδων

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 3

Ευθέα Γινόμενα Ομάδων

Για την περαιτέρω ανάπτυξη τής θεωρίας θα χρειαστούμε ορισμένα στοιχεία από τα ευθέα γινόμενα ομάδων τα οποία παρουσιάζουμε παρακάτω.

3.1 Εξωτερικό και Εσωτερικό ευθύ Γινόμενο

3.1.1 Εξωτερικό ευθύ Γινόμενο

Ορισμός 3.1.1. Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες. Ονομάζουμε *εξωτερικό ευθύ γινόμενο των ομάδων* G_1 *και* G_2 την ομάδα $(G_1 \times G_2, \star)$, όπου $G_1 \times G_2$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των G_1 και G_2 και όπου η πράξη «$\star$» ορίζεται ως

$$\begin{aligned}&\star : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to (G_1 \times G_2),\\ &((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1, g_2) \star (h_1, h_2) := (g_1 \star_1 h_1, g_2 \star_2 h_2)\end{aligned}$$

Ο προηγούμενος ορισμός γενικεύεται στο εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(\prod_{i \in I} G_i, \star)$ οποιασδήποτε οικογένειας ομάδων $((G_i, \star_i))_{i \in I}$.

Παραδείγματα 3.1.1. Η ομάδα $(\mathcal{R}, +)$ με στοιχεία τις ακολουθίες $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ των πραγματικών αριθμών και πράξη

$$+ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}, ((\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}) \mapsto ((\alpha_i + \beta_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

την πρόσθεση των ακολουθιών συμπίπτει με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο τής οικογένειας ομάδων $((G_i, \star_i))_{i \in \mathbb{N}}$, όπου για κάθε δείκτη $i \in \mathbb{N}$, η ομάδα $(G_i, \star_i)$ ισούται με την ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ των πραγματικών αριθμών με πράξη τη συνηθισμένη πρόσθεση των πραγματικών.

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται σε οποιοδήποτε εισαγωγικό μάθημα άλγεβρας:

Πρόταση 3.1.1. *Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες.*

(α′) *Το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ των G_1 και G_2 είναι μια αβελιανή ομάδα αν, και μόνο αν, οι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι αβελιανές.*

(β′) *Το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ είναι ισόμορφο με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_2 \times G_1, \star')$.*

(γ′) *Αν οι G_1 και G_2 είναι πεπερασμένες κυκλικές ομάδες με τάξεις σχετικώς πρώτες, δηλαδή με Μ.Κ.Δ.$([G_1 : 1], [G_2 : 1]) = 1$, τότε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ είναι κυκλική ομάδα τάξης $[G_1 : 1] \cdot [G_2 : 1]$.*

Πόρισμα 3.1.2. *Έστω ότι $((G_i, \star_i))_{i \in I}, I = \{1, 2, \ldots, s \in \mathbb{N}\}$, είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυκλικών ομάδων, όπου οι τάξεις $[G_i : 1] = n_i$ είναι ανά δύο σχετικώς πρώτες, δηλαδή όπου Μ.Κ.Δ.$(n_i, n_j) = 1$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq s, i \neq j$. Τότε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(\prod_{i=1}^{s} G_i, \star)$ τής οικογένειας $((G_i, \star_i))_{i \in I}$ είναι μια κυκλική ομάδα τάξης $\prod_{i=1}^{s} n_i$.*

Απόδειξη. Επαγωγή ως προς το πλήθος s των ομάδων. □

Παρατηρήσεις 3.1.1. (α′) Το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ δύο κυκλικών ομάδων $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ δεν είναι απαραιτήτως κυκλική ομάδα.

Για παράδειγμα, το εξωτερικό ευθύ γινόμενο τής κυκλικής ομάδας C_n με $n > 1$ στοιχεία, δηλαδή η $C_n \times C_n$, δεν είναι **ποτέ** μια κυκλική ομάδα, αφού η τάξη οποιουδήποτε στοιχείου $(a, b) \in C_n \times C_n$ είναι πάντοτε ένας διαιρέτης τού n (γιατί;), ενώ η τάξη της $[C_n \times C_n : 1]$ ισούται με n^2.

(β′) Είναι εύκολη η διαπίστωση ότι αν, $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες και $H_i \leq G_i, i = 1, 2$, είναι αντιστοίχως δύο υποομάδες τους, τότε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $H_1 \times H_2$ είναι μια υποομάδα τού εξωτερικού ευθέος γινομένου $G_1 \times G_2$. Ωστόσο, δεν έχει κάθε υποομάδα $H \leq G_1 \times G_2$ απαραιτήτως τη συγκεκριμένη μορφή.

Επί παραδείγματι, το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ διαθέτει ως υποομάδα την

$$\Delta = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Ωστόσο, δεν υπάρχουν υποομάδες H_1, H_2 τής $\mathbb{Z}$ με $H_1 \times H_2 = \Delta$. Αφού, αν υπήρχαν $H_1, H_2 \leq \mathbb{Z}$ με $H_1 \times H_2 = \Delta$, τότε κάθε $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ θα ήταν ίσο με κάποιο $(z, z) \in \Delta$ και γι' αυτό τελικώς θα ήταν $H_1 = H_2$. Τώρα επειδή η $\mathbb{Z}$ είναι κυκλική, έπεται ότι και η H θα ήταν κυκλική. Συνεπώς, θα υπήρχε $a \in \mathbb{Z}, a \geq 0$ με $H = \langle a \rangle$. Αλλά τώρα αφού $H \times H = \Delta$, πρέπει όλα τα στοιχεία τής H να είναι ίσα, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση όπου $H = \{0\}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η τάξη τής $H \times H$ ισούται με 1, ενώ η τάξη τής Δ είναι άπειρη.

Ορισμός 3.1.2. Τα εξωτερικά ευθέα γινόμενα $(\prod_{i=1}^{n} G_i, \star)$, όπου κάθε ομάδα G_i είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα C_p, p πρώτος αριθμός, ονομάζονται *στοιχειώδεις αβελιανές* p*–ομάδες*.

Προσέξτε ότι το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ δύο ομάδων $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ δεν έχει ως υποομάδες τις G_1 και G_2. Ωστόσο, η συγκεκριμένη «ιδιάζουσα συμπεριφορά» αίρεται με την εισαγωγή τής έννοιας τού εσωτερικού ευθέος γινομένου.

3.1.2 Εσωτερικό ευθύ Γινόμενο

Ορισμός 3.1.3. Έστω ότι $\{G_i \mid i = 1, 2, \ldots, s\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο υποομάδων μιας ομάδας $(G, \star)$. Η G ονομάζεται το *εσωτερικό ευθύ γινόμενο* των υποομάδων $G_i, i = 1, 2, \ldots, s$ αν, για κάθε $1 \leq i \leq s$, η $G_i \trianglelefteq G$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G και αν, κάθε $g \in G$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο τής μορφής $g = g_1 g_2 \ldots g_s$, όπου $g_i \in G_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$.

Υπενθυμίζουμε ότι ονομάζουμε την G γινόμενο των υποομάδων της $\{G_i \mid i = 1, 2, \ldots, s\}$, όπου $G_i \trianglelefteq G, \forall i, 1 \leq i \leq s$ αν, $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$, δηλαδή αν, κάθε στοιχείο $g \in G$ ισούται με ένα γινόμενο τής μορφής $g_1 g_2 \ldots g_s$, όπου $g \in G_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$.

Παραδείγματα 3.1.2. Η κυκλική ομάδα $(C_6 = \langle x \rangle, \star)$ τάξης 6 είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των κυκλικών υποομάδων $C_2 = \langle x^3 \rangle$ και $C_3 = \langle x^2 \rangle$ των οποίων οι τάξεις είναι 2 και 3 αντιστοίχως.

Προφανώς $C_2 \trianglelefteq C_6$ και $C_3 \trianglelefteq C_6$. Για τα στοιχεία τής C_6 έχουμε:

$$\begin{array}{ccc} e_{C_6} = e_{C_6} \star e_{C_6}, & x = x^3 \star (x^2)^2, & x^2 = e_{C_6} \star x^2, \\ x^3 = x^3 \star e_{C_6}, & x^4 = e_{C_6} \star x^4, & x^5 = x^3 \star x^2. \end{array} \tag{*}$$

Συνεπώς, $C_6 = \langle x^3 \rangle \cdot \langle x^2 \rangle$. Υπολείπεται η απόδειξη ότι τα ανωτέρω γινόμενα (*) είναι μοναδικά ως γινόμενα, όπου ο πρώτος παράγοντας ανήκει στην C_2 και ο δεύτερος στην C_3. Όμως αυτό διαπιστώνεται αμέσως λαμβάνοντας υπ' όψιν την αμέσως πρόταση.

Πρόταση 3.1.3. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι $G_i \trianglelefteq G, 1 \leq i \leq s$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής G με $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$.*
Η ομάδα G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $G_1, G_2, \ldots, G_s$ αν, και μόνο αν, $\forall i, 2 \leq i \leq s, (G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_{i-1}) \cap G_i = \{e_G\}$.

Απόδειξη. □

Απόδειξη. «$\Leftarrow$» Σύμφωνα με τον ορισμό τού ευθέος γινομένου, υπολείπεται η απόδειξη του μοναδικού τής παράστασης κάθε στοιχείου τής G ως γινόμενο στοιχείων από τις υποομάδες $G_1, G_2, \ldots, G_s$.
Έστω ότι $g = g_1 g_2 \ldots g_s = h_1 h_2 \ldots h_s (*)$, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq s, g_i, h_i \in G_i$. Τότε $g_s h_s^{-1} = (g_1 g_2 \ldots g_{s-1})^{-1}(h_1 h_2 \ldots h_{s-1})$.
Αλλά $g_s h_s^{-1} \in G_s$ και $(g_1 g_2 \ldots g_{s-1})^{-1}(h_1 h_2 \ldots h_{s-1}) \in G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_{s-1}$. Επομένως, $g_s h_s^{-1} \in (G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_{s-1}) \cap G_s = \{e_G\}$ και γι' αυτό $g_s = h_s$. Τώρα η σχέση $(*)$ παίρνει τη μορφή $g = g_1 g_2 \ldots g_{s-1} = h_1 h_2 \ldots h_{s-1}$ από όπου ακριβώς όπως προηγουμένως συμπεραίνουμε ότι $g_{s-1} h_{s-1}^{-1} = e_G$, δηλαδή $g_{s-1} = h_{s-1}$. Συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε ότι $g_s = h_s, g_{s-1} = h_{s-1}, \ldots, g_2 = h_2, g_1 = h_1$.
«$\Rightarrow$»Έστω ότι α είναι ένα στοιχείο τής G, το οποίο ανήκει στην τομή $(G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_{i-1}) \cap G_i$. Τότε $\alpha = g_1 g_2 \ldots g_{i-1}$ με $g_j \in G_j, j = 1, 2, \ldots i-1$ και $\alpha \in G_i$. Αλλά το α έχει μοναδική παράσταση ως γινόμενο στοιχείων $g_i \in G_i, i = 1, 2, \ldots, s$. Επομένως, $\alpha = e_G$. □

Επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 3.1.2 διαπιστώνουμε τώρα ότι η C_6 είναι το εσωτερικό γινόμενο των δύο κυκλικών υποομάδων της C_2 και C_3, αφού $C_2 \cap C_3 = \{e_{C_6}\}$

Πόρισμα 3.1.4. *Έστω ότι μια ομάδα $(G, \star)$ είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων της $G_1, G_2, \ldots, G_s$. Τότε $\forall g_i \in G_i, g_j \in G_j$ με $i \neq j, 1 \leq i, j \leq s$ είναι $g_i g_j = g_j g_i$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1}$ ανήκει στην τομή $G_i \cap G_j = \{e_G\}$, επειδή $g_i g_j g_i^{-1} \in G_j$ και $g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in G_i$, αφού $G_i \trianglelefteq G$ και $G_j \trianglelefteq G$. Επομένως, $g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e_G$, δηλαδή $g_i g_j = g_j g_i$. □

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε ένα σημαντικό λήμμα που χρησιμοποιούμε αμέσως παρακάτω, αλλά και αργότερα κατά τη μελέτη των μηδενοδύναμων ομάδων, βλ. Θεώρημα 5.3.6.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω $(G, \star)$ μια πεπερασμένη ομάδα. Αν, για κάθε πρώτο διαιρέτη p τής τάξης τής ομάδας υπάρχει ακριβώς μία p–Sylow υποομάδα, τότε η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της.*

Απόδειξη. Έστω $P_1, P_2, \ldots, P_s$ οι Sylow υποομάδες τής G, που αντιστοιχούν στους διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες $p_1, p_2, \ldots, p_s$ τής τάξης τής G. Θα δείξουμε ότι οι $P_1, P_2, \ldots, P_s$ ικανοποιούν τις υποθέσεις τής Πρότασης 3.1.3.

Αφού οι Sylow υποομάδες που αντιστοιχούν στον ίδιο πρώτο αριθμό είναι πάντοτε συζυγείς, συμπεραίνουμε από την υπόθεση τής εφαρμογής ότι οι P_i είναι ορθόθετες υποομάδες τής G, $\forall i, 1 \leq i \leq s$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\forall i, 2 \leq i \leq s$ είναι $(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_{i-1}) \cap P_i = \{e_G\}$ και ότι $|P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_i| = |P_1||P_2|\ldots|P_i|$.

Πράγματι, $P_1 \cap P_2 = \{e_G\}$, αφού οι τάξεις $|P_1|$ και $|P_2|$ είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί. Επιπλέον, $|P_1 \cdot P_2| = |P_1||P_2|$, αφού $|P_1 \cdot P_2| = |P_1||P_2|/|P_1 \cap P_2|$.

Τώρα, $(P_1 \cdot P_2) \cap P_3 = \{e_G\}$, αφού οι τάξεις $|P_1 \cdot P_2|$ και $|P_3|$ είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί. Επομένως, $|P_1 \cdot P_2 \cdot P_3| = |P_1||P_2||P_3|$, αφού $|(P_1 \cdot P_2) \cdot P_3| = |P_1 \cdot P_2||P_3|/|(P_1 \cdot P_2) \cap P_3|$.

Υποθέτοντας ότι $(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_{i-1}) \cap P_i = \{e_G\}$ και ότι $|P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_i| = |P_1||P_2|\ldots|P_i|$, θα δείξουμε ότι

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_i) \cap P_{i+1} = \{e_G\} \tag{*}$$

και ότι

$$|P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{i+1}| = |P_1||P_2|\ldots|P_{i+1}|. \tag{**}$$

Πράγματι, η (*) είναι αληθής, αφού οι τάξεις $|P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_i| = |P_1||P_2|\ldots|P_i|$ και $|P_{i+1}|$ είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί. Επιπλέον, η (**) είναι αληθής, αφού

$$|(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_i) \cdot P_{i+1}| = \frac{|P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_i||P_{i+1}|}{|(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_i) \cap P_{i+1}|} = \frac{|P_1||P_2|\ldots|P_i||P_{i+1}|}{1}.$$

Τέλος, η G ισούται με την υποομάδα $P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{s-1} \cdot P_s$, αφού η τάξη τής τελευταίας ισούται με $|P_1||P_2|\ldots|P_{s-1}||P_s|$ που είναι ακριβώς η τάξη τής G.
Επομένως, η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $P_1, P_2, \ldots, P_s$. □

Πρόταση 3.1.6. *Κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα $(G, \star)$ είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της.*

Απόδειξη. Σε κάθε πρώτο διαιρέτη p τής τάξης τής G, η αντίστοιχη p–Sylow υποομάδα είναι ορθόθετη, αφού η G είναι αβελιανή, και ως εκ τούτου μοναδική. Επομένως, το συμπέρασμα τού θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια τού Λήμματος 3.1.5. □

3.1.3 Σχέση εξωτερικού και εσωτερικού ευθέος Γινομένου

Πρόταση 3.1.7. *Μια ομάδα $(G, \star)$ είναι το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των ομάδων $(G_i, \star_i), i = 1, 2, \ldots, s$ αν, και μόνο αν, υπάρχουν ορθόθετες υποομάδες $N_i \trianglelefteq G$ τής G, όπου για κάθε $i, 1 \leq i \leq s$, η υποομάδα N_i είναι ισόμορφη με την G_i έτσι, ώστε η G να ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $N_i, 1 \leq i \leq s$.*

Απόδειξη. «$\Rightarrow$» Για κάθε $i, 1 \leq i \leq s$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\theta_i : G \to G,$$
$$(g_1, g_2, \ldots, g_s) \mapsto \theta_i((g_1, g_2, \ldots, g_s)) := (g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, e_{G_i}, g_{i+1}, \ldots, g_s).$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η θ_i είναι ένας ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα

$$N_i := \mathrm{Ker}\theta_i = \{(e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \mid g_i \in G_i\}.$$

Γι΄αυτό $\forall i, 1 \leq i \leq s$, οι N_i είναι ορθόθετες υποομάδες τής G.
Επιπλέον, έχουμε $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s$, αφού αν, $\alpha = (g_1, g_2, \ldots, g_s)$, τότε

$$\alpha = (g_1, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \ldots$$
$$(e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \ldots (e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \ldots, g_s),$$

όπου προφανώς $\forall i, 1 \leq i \leq s, n_i = (e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \in N_i$.
Η συγκεκριμένη παράσταση τού α ως γινόμενο των στοιχείων $n_i \in N_i$ είναι μοναδική, αφού αν,

$$\alpha = (h_1, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \ldots$$
$$(e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, h_i, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \ldots (e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \ldots, h_s),$$

είναι ακόμη μια παράσταση τού α ως γινόμενο στοιχείων από τις $N_i, 1 \leq i \leq s$, τότε $\alpha = (h_1, h_2, \ldots, h_s)$ από όπου έπεται ότι $h_i = g_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$ και συνεπώς τα $n_i = (e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \ldots, e_{G_s}) \in N_i, 1 \leq i \leq s$ με $\alpha = n_1 n_2 \ldots n_i \ldots n_s$ είναι μοναδικώς καθορισμένα.
«$\Leftarrow$» Έστω ότι η G ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s$ των ορθόθετων υποομάδων της $N_i \trianglelefteq G, 1 \leq i \leq s$. Θεωρούμε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_s$ των N_i και την απεικόνιση

$$\sigma : N_1 \times N_2 \cdots \times N_s \to G = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s, (n_1, n_2, \ldots, n_s) \mapsto n_1 n_2 \ldots n_s.$$

Παρατηρούμε ότι η σ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, αφού

$$\sigma((n_1, n_2, \ldots, n_s)(n_1', n_2', \ldots, n_s')) = (n_1 n_1')(n_2 n_2') \ldots (n_s n_s') =$$
$$(n_1 n_2 \ldots n_s)(n_1' n_2' \ldots n_s') = \sigma((n_1, n_2, \ldots, n_s))\, \sigma((n_1', n_2', \ldots, n_s')),$$

αφού $n_i n_j' = n_j' n_i, \forall i, j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$. Προφανώς ο σ είναι ένας επιμορφισμός. Επιπλέον αν, $(n_1, n_2, \ldots, n_s) \in \mathrm{Ker}\sigma$, τότε $n_1 n_2 \ldots n_s = e_G$. Αλλά αφού η $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $N_i, 1 \leq i \leq n$, η παράσταση τού e_G ως γινόμενο στοιχείων $n_i \in N_i, 1 \leq i \leq n$ είναι μοναδική και γι' αυτό $n_i = e_G, \forall i, 1 \leq i \leq s$. Επομένως, $\mathrm{Ker}\sigma = \{(e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_2})\}$ και ο επιμορφισμός σ είναι ένας ισομορφισμός. □

Παραδείγματα 3.1.3. Η διεδρική ομάδα $(D_4, \circ)$ των στερεών κινήσεων τού τετραγώνου δεν ισούται με ένα εσωτερικό ευθύ γινόμενο δύο γνησίων υποομάδων της. Πράγματι, οι γνήσιες υποομάδες τής D_4 έχουν τάξη $1, 2$ ή 4. Αν ήταν η D_4 το εσωτερικό ευθύ γινόμενο δύο υποομάδων της, τότε θα ήταν και η ίδια αβελιανή. Πράγμα άτοπο, αφού η D_4 δεν είναι αβελιανή.

Παραδείγματα 3.1.4. Έστω ότι $(S_n, \circ)$ είναι η συμμετρική ομάδα των «1–1» και «επί» απεικονίσεων από το σύνολο $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ στον εαυτό του και ότι I είναι ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο τού N.

Έστω G το υποσύνολο τής S_n που αποτελείται από τα $\sigma \in S_n$ με $\sigma(I) = I$, δηλαδή από τα στοιχεία τής S_n που απεικονίζουν το υποσύνολο I στον εαυτό του.
Προτείνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι το σύνολο G είναι μια υποομάδα τής S_n.
Έστω ότι J είναι το συνολοθεωρητικό συμπλήρωμα το I ως προς N, δηλαδή $J = N \setminus I$.
Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία σ τής G διατηρούν το υποσύνολο J, δηλαδή $\sigma(J) = J$, επειδή αυτά διατηρούν το I και επειδή το N είναι μια αποσυνδετή[1] ένωση των υποσυνόλων I και J.
Θεωρούμε το υποσύνολο H (αντιστοίχως K) τής G που αποτελείται από τα $\sigma \in G$ (αντιστοίχως $\tau \in G$) που διατηρούν σημειακά το I (αντιστοίχως σημειακά το J), δηλαδή $\sigma \in H \Leftrightarrow \forall i \in I, \sigma(i) = i$ (αντιστοίχως $\tau \in K \Leftrightarrow \forall j \in J, \tau(j) = j$).
Προτείνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι τα υποσύνολα I και J είναι υποομάδες τής G. Πρόκειται μάλιστα για ορθόθετες υποομάδες τής G, αφού είναι πυρήνες των δράσεων τής G επί των συνόλων I και J, βλ. Ορισμό 1.1.3.

Ισχυριζόμαστε ότι η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων της H και K.
Παρατηρούμε ότι $H \cap K = \{Id_n\}$, αφού αν, $\sigma \in H \cap K$, τότε $\sigma(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in I \cup J = N$.
Αν τώρα αποδείξουμε ότι κάθε $\sigma \in G$ είναι σύνθεση ενός στοιχείου από την H με ένα στοιχείο από την K, τότε από την Πρόταση 3.1.7 θα προκύψει ότι η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των H και K.

Έστω $\sigma \in G$ και μια ανάλυσή του $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_t$ σε αποσυνδετούς κύκλους. Παρατηρούμε ότι κάθε κύκλος $c_\ell, \ell = 1, \ldots, t$ περιέχει ή μόνο στοιχεία από το I ή μόνο στοιχεία από το J αφού αν, σε κάποιον c_ℓ υπήρχαν στοιχεία και από το I και από το J, τότε το σ δεν θα σταθεροποιούσε το σύνολο I, πράγμα άτοπο αφού το σ είναι στοιχείο τής G. Γι' αυτό σχηματίζοντας το γινόμενο σ_I (αντιστοίχως σ_J) των κύκλων τού σ που δεν περιέχουν στοιχεία από το I (αντιστοίχως που δεν περιέχουν στοιχεία από το J), διαπιστώνουμε ότι το σ_I ανήκει στο H και το σ_J ανήκει στο K και $\sigma = \sigma_I \circ \sigma_J$.

Ώστε η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των H και K και $[G : 1] = [H : 1][K : 1]$. Προφανώς, η H (αντιστοίχως η K) είναι ισόμορφη με την συμμετρική ομάδα S_J τού συνόλου J (αντιστοίχως με την συμμετρική ομάδα S_I τού συνόλου I) και γι' αυτό $G \cong S_J \times S_I$ και $[G : 1] = (n - m)!m!$, όπου m είναι το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου I.

[1] ξένη

3.2 Η Ταξινόμηση των πεπερασμένων αβελιανών Ομάδων

Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια αβελιανή ομάδα τάξης $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, όπου οι αριθμοί $p_i, 1 \leq i \leq s$ είναι ανά δύο διαφορετικοί πρώτοι και οι $\alpha_i, 1 \leq i \leq s$, είναι φυσικοί.

Από την Πρόταση 3.1.6 γνωρίζουμε ότι η G ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_s$ των p_i–Sylow υποομάδων της $P_i, 1 \leq i \leq s$, που έχουν αντίστοιχες τάξεις $|P_i| = p_i^{\alpha_i}, 1 \leq i \leq s$ και γι' αυτό, βλ. Πρόταση 3.1.7, η G είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο p–ομάδων $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_s$, όπου $|\mathcal{P}_i| = p_i^{\alpha_i}, 1 \leq i \leq s$. Οι $\mathcal{P}_i$ είναι αβελιανές p–ομάδες και για κάθε $i, 1 \leq i \leq s$, η $\mathcal{P}_i$ είναι ισόμορφη με την αντίστοιχη p_i–Sylow υποομάδα P_i.

Παρατηρούμε ότι αν, $\sigma : \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2 \times \cdots \times \mathcal{Q}_t \to G$ είναι ένας ισομορφισμός από ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο p–ομάδων $\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2 \times \cdots \times \mathcal{Q}_t$ στην G με $|\mathcal{Q}_j| = q_j^{\beta_j}, 1 \leq j \leq t$, όπου οι αριθμοί $q_j, 1 \leq j \leq t$ είναι ανά δύο διαφορετικοί πρώτοι και οι $\beta_j, 1 \leq j \leq t$ είναι φυσικοί, τότε από τη μοναδικότητα τής ανάλυσης τής τάξης n τής G σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών, προκύπτει ότι $s = t$ και εν συνεχεία ότι υπάρχει μια μετάταξη $\tau \in S_s$, ούτως ώστε $\forall i, 1 \leq i \leq s$ η τάξη τής $\mathcal{Q}_{\tau(i)}$ να ισούται με την τάξη τής αντίστοιχης p_i–Sylow υποομάδας P_i. Επομένως, η εικόνα τής $\mathcal{Q}_{\tau(i)}$, μέσω τού ισομορφισμού σ, είναι μια p_i–Sylow υποομάδα τής G και γι' αυτό συμπίπτει με την P_i. Ώστε, για κάθε $i, 1 \leq i \leq s$, η $\mathcal{Q}_{\tau(i)}$ είναι ισόμορφη με την p_i–Sylow υποομάδα P_i και ως εκ τούτου και με την αντίστοιχη p–ομάδα $\mathcal{P}_i$ τάξης $p_i^{\alpha_i}$.

Έτσι προκύπτει η

Πρόταση 3.2.1. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια αβελιανή ομάδα τάξης $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, όπου οι αριθμοί $p_i, 1 \leq i \leq s$ είναι πρώτοι, διαφορετικοί ανά δύο, και οι αριθμοί $\alpha_i, 1 \leq i \leq s$, είναι φυσικοί. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων*

$$\sigma : G \to \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_s,$$

όπου $\forall i, 1 \leq i \leq s, |\mathcal{P}_i| = p_i^{\alpha_i}$.
Επιπλέον αν, η G είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο p–ομάδων $\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2 \times \cdots \times \mathcal{Q}_t$, τότε $s = t$ και υπάρχει μια μετάταξη $\tau \in S_s$, ούτως ώστε $\forall i, 1 \leq i \leq s$, $\mathcal{Q}_{\tau(i)} \cong \mathcal{P}_i$.

Με άλλα λόγια μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα G είναι «με ακρίβεια μετάταξης» κατά μοναδικό τρόπο ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο πεπερασμένων αβελιανών p–ομάδων.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι και οι p–ομάδες είναι ισόμορφες με ευθέα γινόμενα κυκλικών ομάδων.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω ότι p είναι ένας πρώτος αριθμός και ότι $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή p–ομάδα. Η G είναι κυκλική ομάδα αν, και μόνο αν, διαθέτει* *ακριβώς μια κυκλική υποομάδα τάξης* p.

Απόδειξη. «$\Rightarrow$». Προφανώς, αν η G είναι κυκλική, τότε σε κάθε διαιρέτη τής τάξης της διαθέτει ακριβώς μία κυκλική υποομάδα, επομένως αυτό συμβαίνει και για τον διαιρέτη p.

«$\Leftarrow$» Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς την τάξη p^m τής ομάδας G. Πριν προχωρήσουμε υπενθυμίζουμε, βλ. Πρόταση 2.1.1, ότι για κάθε $p^n, n \leq m$, η G διαθέτει υποομάδα τάξης p^n. Ιδιατέρως, η G διαθέτει πάντοτε τουλάχιστον μια υποομάδα τάξης p, γεγονός που έπεται και από το Θεώρημα Cauchy, σελ. 20.
Για $m = 1$, η ομάδα G είναι πρώτης τάξης p και ως εκ τούτου κυκλική. Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τις ομάδες τάξης p^k, θα αποδείξουμε ότι αυτός είναι αληθής και για κάθε ομάδα G τάξης p^{k+1}.

Ας είναι C_p η μοναδική κυκλική υποομάδα τάξης p τής G. Θεωρούμε τον ενδομομορφισμό $\phi : G \to G, g \mapsto \phi(g) = g^p$. Προφανώς, $C_p \leq \mathrm{Ker}\phi$. Κάθε $g \in \mathrm{Ker}\phi, g \neq e_G$ παράγει μια υποομάδα $\langle g\rangle$ τής G τάξης p. Επομένως, $\langle g\rangle = C_p$ και γι' αυτό $g \in C_p$. Ώστε, $\mathrm{Ker}\phi = C_p$.
Η πηλικοομάδα G/C_p είναι τάξης p^k και γι' αυτό διαθέτει τουλάχιστον μια υποομάδα $\mathcal{S}$ τάξης p. Ισχυριζόμαστε ότι η $\mathcal{S}$ είναι η μοναδική κυκλική υποομάδα τής G/C_p τάξης p. Πράγματι, αν οι $\mathcal{S}_1$ και $\mathcal{S}_2$ ήταν δύο διαφορετικές κυκλικές υποομάδες τής G/C_p τάξης p, τότε και η $\phi(G)$ θα διέθετε δύο διαφορετικές κυκλικές υποομάδες τάξης p, αφού $\phi(G) \cong G/\mathrm{Ker}\phi = G/C_p$. Τότε όμως θα διέθετε και η G δύο διαφορετικές κυκλικές υποομάδες τάξης p, πράγμα άτοπο. Επειδή τώρα η G/C_p είναι τάξης p^k και διαθέτει ακριβώς μια κυκλική υποομάδα τάξης p, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεσή μας και να συμπεράνουμε ότι η G/C_p είναι κυκλική. Ώστε, $G/C_p = \langle aC_p\rangle, a \in G$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\langle a\rangle = G$. Πράγματι, αν $g \in G$, τότε $gC_p = a^nC_p, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ και επομένως $g^{-1}a^n = c \in C_p$ (*). Αλλά $C_p \leq \langle a\rangle$, αφού η $\langle a\rangle \leq G$ ως p–ομάδα διαθέτει κυκλικές υποομάδες τάξης p, οι οποίες είναι και κυκλικές υποομάδες τάξης p τής G. Άρα η μοναδική κυκλική υποομάδα τάξης p τής $\langle a\rangle$ είναι η C_p. Ώστε, το c στη σχέση (*) είναι στοιχείο τής $\langle a\rangle$. Έστω ότι $c = a^s, s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Τώρα, η (*) γράφεται $g^{-1}a^n = a^s$ και επομένως, $g = a^{n-s}$, δηλαδή $G \leq \langle a\rangle$ και γι' αυτό $G = \langle a\rangle$. □

Λήμμα 3.2.3. *Έστω ότι* $(G, \star)$ *είναι μια αβελιανή* p*–ομάδα και* K *μια μέγιστης τάξης κυκλική υποομάδα της, τότε υπάρχει μια υποομάδα* G' *τής* G*, τέτοια ώστε η* G *να είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των* K *και* G'.

Απόδειξη. Θα εκτελέσουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς την τάξη p^m τής G.

Για $m = 1$, η ομάδα G είναι πρώτης τάξης p και ως εκ τούτου κυκλική. Προφανώς, η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $K = G$ και $G' = \{e_G\}$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τις ομάδες τάξης p^k, θα αποδείξουμε ότι είναι αληθής και για κάθε ομάδα G τάξης p^{k+1}.

Αν η G είναι κυκλική, τότε η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $K = G$ και $G' = \{e_G\}$.

Αν η G δεν είναι κυκλική, τότε θεωρούμε μια μέγιστης τάξης κυκλική υποομάδα $\langle a\rangle = K < G$. Προφανώς, η K διαθέτει μια μοναδική κυκλική υποομάδα K_p τάξης p.

Επειδή η G δεν είναι κυκλική, περιέχει τουλάχιστον ακόμα μία κυκλική υποομάδα $C_p \neq K_p$ τάξης p, βλ. Λήμμα 3.2.2. Προφανώς $K_p \cap C_p = \{e_G\}$ και ως εκ τούτου $K \cap C_p = \{e_G\}$.

Θεωρούμε την πηλικοομάδα G/C_p και την υποομάδα της $(K \cdot C_p)/C_p$. Παρατηρούμε ότι

$$[(K \cdot C_p)/C_p : 1] = \frac{[K \cdot C_p : 1]}{[C_p : 1]} = \frac{[K : 1][C_p : 1]}{[C_p : 1]} = [K : 1] \tag{1}$$

αφού

$$[K \cdot C_p : 1] = \frac{[K : 1][C_p : 1]}{[K \cap C_p : 1]} = [K : 1][C_p : 1]$$

και αφού $[K \cap C_p : 1] = 1$, διότι $K \cap C_p = \{e_G\}$.

Επειδή, $\forall b \in K, \forall c \in C_p$ είναι $(bc)C_p = bC_p$, διαπιστώνουμε ότι η $(K \cdot C_p)/C_p$ είναι κυκλική, εφόσον παράγεται από το στοιχείο aC_p.

Λόγω τής (1), η τάξη $\circ(aC_p)$ τού στοιχείου aC_p είναι:

$$\circ(aC_p) = [(K \cdot C_p)/C_p : 1] = [K : 1] = \circ(a).$$

Επομένως, η $(K \cdot C_p)/C_p$ είναι μια μέγιστης τάξης κυκλική υποομάδα τής G/C_p, αφού $\forall gC_p \in G/C_p$ είναι $\circ(gC_p) \leq \circ(g)$.

Η G/C_p είναι μια p–ομάδα τάξης p^k. Γι' αυτό, χρησιμοποιώντας την μέγιστης τάξης κυκλική υποομάδα της $(K \cdot C_p)/C_p$, συμπεραίνουμε με τη βοήθεια τής επαγωγικής υπόθεσης, ότι υπάρχει μια υποομάδα $L = G'/C_p$ τής G/C_p, όπου η G' είναι μια υποομάδα τής G με $C_p \leq G'$, έτσι ώστε η G/C_p να είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $(K \cdot C_p)/C_p$ και G'/C_p. Δηλαδή, $G/C_p = ((K \cdot C_p)/C_p) \cdot (G'/C_p))$ και $((K \cdot C_p)/C_p) \cap (G'/C_p) = \{C_p\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των K και G'.
Αν $g \in K \cap G'$, τότε $gC_p \in ((K \cdot C_p)/C_p) \cap (G'/C_p) = \{C_p\}$. Συνεπώς, $gC_p = C_p$ και $g \in C_p$. Αλλά τότε $g \in K \cap C_p = \{e_G\}$. Ώστε $g = e_G$ και $K \cap G' = \{e_G\}$.

Υπολείπεται η απόδειξη ότι $G = K \cdot G'$ και επειδή η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, αρκεί να δείξουμε ότι $[K \cdot G' : 1] = [G : 1]$. Αλλά $[K \cap G' : 1] = 1$, αφού $K \cap G' = \{e_G\}$ και γι' αυτό

$$[(K \cdot G') : 1] = \frac{[K : 1][G' : 1]}{[K \cap G' : 1]} = [K : 1][G' : 1].$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι $[G : 1] = [K : 1][G' : 1]$.

Επειδή, η G/C_p είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $(K \cdot C_p)/C_p$ και G'/C_p, έχουμε

$$[G/C_p : 1] = [(K \cdot C_p)/C_p : 1][G'/C_p : 1] = [(K \cdot C_p)/C_p : 1]\frac{[G' : 1]}{[C_p : 1]}. \tag{2}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την (1), η (2) γίνεται

$$[G/C_p : 1] = [K : 1]\frac{[G' : 1]}{[C_p : 1]}. \tag{3}$$

Έτσι, λόγω τής (3), έπεται

$$[G:1]=[G/C_p:1][C_p:1]=[K:1]\frac{[G':1]}{[C_p:1]}[C_p:1]=[K:1][G':1].$$

Αυτό ακριβώς που θέλαμε να αποδείξουμε. □

Πρόταση 3.2.4. (α′) *Κάθε πεπερασμένη αβελιανή* p*–ομάδα* $(G,\star)$ *είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων* $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_s$.

(β′) *Επιπλέον αν, οι κυκλικές ομάδες* $\mathcal{K}_i, 1 \leq i \leq s$ *είναι διατεταγμένες στο ως άνω ευθύ γινόμενο κατά διάταξη αντίστροφη των τάξεών τους, δηλαδή* $i \leq j$ *αν, και μόνο αν,* $[\mathcal{K}_i : 1] \geq [\mathcal{K}_j : 1]$ *και αν, η* $(G,\star)$ *είναι ισόμορφη με ένα ακόμη εξωτερικό ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων* $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_t$, *οι οποίες είναι επίσης διατεταγμένες στο συγκεκριμένο ευθύ γινόμενο κατά διάταξη αντίστροφη των τάξεών τους, δηλαδή* $i \leq j$ *αν, και μόνο αν,* $[\mathcal{H}_i : 1] \geq [\mathcal{H}_j : 1]$, *τότε* $s = t$ *και* $\forall i, 1 \leq i \leq s, \mathcal{K}_i \cong \mathcal{H}_i$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε και τα δύο μέρη τής πρότασης με επαγωγή ως προς την τάξη p^m τής G.

(α′) Για $m = 1$, η ομάδα G είναι πρώτης τάξης p και ως εκ τούτου κυκλική. Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε ομάδα τάξης $\leq p^k$, θα αποδείξουμε ότι είναι αληθής και για κάθε ομάδα τάξης p^{k+1}.

Έστω G μια ομάδα τάξης p^{k+1}. Αν η G είναι κυκλική, τότε δεν χρειάζεται να αποδείξουμε κάτι. Αν η G δεν είναι κυκλική, τότε θεωρούμε μια μέγιστης τάξης κυκλική υποομάδα $K < G$, η οποία προφανώς είναι γνήσια υποομάδα τής G, και από το Λήμμα 3.2.3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια υποομάδα G' τής G, ώστε η G να είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των K και G'. Τώρα η G είναι ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathcal{K}_1 \times G'$, όπου η $\mathcal{K}_1$ είναι μια ομάδα ισόμορφη με την κυκλική υποομάδα K τής G. Η G' είναι μια p–ομάδα με τάξη γνήσια μικρότερη από p^{k+1}, αφού η K είναι μια γνήσια υποομάδα τής G, και χρησιμοποιιώντας την επαγωγική υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι η G' είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_s$ κυκλικών ομάδων. Συνεπως, η G είναι ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_s$ των κυκλικών ομάδων $\mathcal{K}_i, 1 \leq i \leq s$.

(β′) Για $m = 1$, η ομάδα G είναι πρώτης τάξης p και ως εκ τούτου κυκλική. Αν τώρα η G είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_t$, τότε θα είναι και το εξωτερικό ευθύ γινόμενο μια κυκλική ομάδα και αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν $t = 1$ και $G \cong \mathcal{H}_1$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε ομάδα τάξης $\leq p^k$, θα αποδείξουμε ότι είναι αληθής και για κάθε ομάδα τάξης p^{k+1}.

Έστω G μια ομάδα τάξης p^{k+1}. Αν η G είναι κυκλική, τότε η απόδειξη εκτελείται όπως και στην περίπτωση $m = 1$. Έστω ότι η G δεν είναι κυκλική και ότι η G είναι ισόμορφη με δύο εξωτερικά ευθέα γινόμενα $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_s$ και $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_t$ οι παράγοντες των οποίων είναι διατεταγμένες κατά διάταξη αντίστροφη των τάξεών τους, όπως ακριβώς περιγράφεται στη διατύπωση τής πρότασης.

Υπενθυμίζουμε ότι αν, A είναι οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα και m είναι ένας φυσικός, τότε το σύνολο $A^m := \{a^m \mid a \in A\}$ είναι μια υποομάδα τής A (*γιατί;*). Επιπλέον αν, η $A = \langle a \rangle$ είναι κυκλική και παράγεται από το στοιχείο a, τότε η A^m είναι (προφανώς!) επίσης κυκλική και παράγεται από το στοιχείο a^m (*γιατί;*).

Στην περίπτωση τής G θεωρούμε τον πρώτο p και την υποομάδα G^p. Η G^p είναι μια γνήσια υποομάδα τής G, επειδή υπάρχουν στοιχεία τής G τάξης p, λόγω τού Θεωρήματος Cauchy (Θεώρημα 1.3.8). Επιπλέον, η G^p είναι ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο ${\mathcal{K}_1}^p \times {\mathcal{K}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{K}_s}^p$ καθώς επίσης και με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο ${\mathcal{H}_1}^p \times {\mathcal{H}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{H}_t}^p$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. Περίπτωση. $G^p = \{e_G\}$. Τότε $\forall i, 1 \le i \le s$ η κυκλική ομάδα ${\mathcal{K}_i}^p$ αποτελείται μόνο από το ουδέτερο στοιχείο $e_{\mathcal{K}_i}$. Συνεπώς $\forall i, 1 \le i \le s$, η $\mathcal{K}_i$ είναι κυκλική τάξης p. Με το ακριβώς ίδιο επιχείρημα συμπεραίνουμε ότι $\forall j, 1 \le j \le t$, η $\mathcal{H}_j$ είναι κυκλική τάξης p. Αφού, $G \cong \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_s$ είναι φανερό ότι οι δύο ομάδες έχουν την ίδια τάξη και γι' αυτό $[G : 1] = p^s$. Επίσης αφού $G \cong \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_t$ συμπεραίνουμε ότι $[G : 1] = p^t$. Επομένως, $s = t$ και $\forall i, 1 \le i \le s, \mathcal{K}_i \cong \mathcal{H}_i$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση μάλιστα, όλες οι ομάδες $\mathcal{K}_i, \mathcal{H}_j$ είναι ισόμορφες με την κυκλική ομάδα C_p με p το πλήθος στοιχεία.

II. Περίπτωση. $G^p \neq \{e_G\}$. Αφού $G^p \cong {\mathcal{K}_1}^p \times {\mathcal{K}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{K}_s}^p$, συμπεραίνουμε ότι και το εξωτερικό ευθύ γινόμενο ${\mathcal{K}_1}^p \times {\mathcal{K}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{K}_s}^p$ έχει περισσότερα τού ενός στοιχεία και ως εκ τούτου υπάρχουν παράγοντες ${\mathcal{K}_i}^p$ με περισσότερα τού ενός στοιχεία. Έστω s' ο μεγαλύτερος δείκτης μεταξύ των 1 και s, ούτως ώστε η ομάδα ${\mathcal{K}_{s'}}^p$ να έχει περισσότερα τού ενός στοιχεία. Τότε λόγω τού τρόπου με τον οποίο έχουν αριθμηθεί οι παράγοντες έχουμε ότι

$$ {\mathcal{K}_{s'+1}}^p = \{e_{\mathcal{K}_{s'+1}}\}, {\mathcal{K}_{s'+2}}^p = \{e_{\mathcal{K}_{s'+2}}\}, \ldots, {\mathcal{K}_s}^p = \{e_{\mathcal{K}_s}\}. \tag{*} $$

Συνεπώς, η G^p είναι επίσης ισόμορφη και με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο ${\mathcal{K}_1}^p \times {\mathcal{K}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{K}_{s'}}^p$. Προσέξτε ότι από τη σχέση (*) συμπεραίνουμε ότι όλες οι ομάδες $\mathcal{K}_{s'+1}, \mathcal{K}_{s'+2}, \ldots, \mathcal{K}_s$ είναι κυκλικές τάξης p.
Τώρα, αφού η G^p είναι επίσης ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο ${\mathcal{H}_1}^p \times {\mathcal{H}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{H}_t}^p$, εργαζόμαστε παρομοίως με αυτό. Έτσι θεωρούμε τον μεγαλύτερο δείκτη t' μεταξύ των 1 και t, ούτως ώστε η ομάδα ${\mathcal{H}_{t'}}^p$ να έχει περισσότερα τού ενός στοιχεία. Τότε λόγω τού τρόπου με τον οποίο είναι αριθμημένες οι παράγοντες έχουμε ότι

$$ {\mathcal{H}_{t'+1}}^p = \{e_{\mathcal{H}_{t'+1}}\}, {\mathcal{H}_{t'+2}}^p = \{e_{\mathcal{H}_{t'+2}}\}, \ldots, {\mathcal{H}_t}^p = \{e_{\mathcal{H}_t}\}. \tag{**} $$

Συνεπώς, η G^p είναι επίσης ισόμορφη με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο ${\mathcal{H}_1}^p \times {\mathcal{H}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{H}_{t'}}^p$. Προσέξτε ότι από τη σχέση (**) συμπεραίνουμε ότι όλες οι ομάδες $\mathcal{H}_{t'+1}, \mathcal{H}_{t'+2}, \ldots, \mathcal{H}_t$ είναι κυκλικές τάξης p.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει η G^p είναι μια γνήσια υποομάδα τής G και γι' αυτό εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στην ομάδα G^p, όπου $G^p \cong {\mathcal{K}_1}^p \times {\mathcal{K}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{K}_{s'}}^p$ και $G^p \cong {\mathcal{H}_1}^p \times {\mathcal{H}_2}^p \times \cdots \times {\mathcal{H}_{t'}}^p$, συμπεραίνουμε ότι $s' = t'$ και ότι $\forall i, 1 \leq i \leq s', \mathcal{K}_i^p \cong \mathcal{H}_i^p$ και ιδιαιτέρως έχουν ίσες τάξεις, δηλαδή $[\mathcal{K}_i^p : 1] = [\mathcal{H}_i^p : 1]$. Επειδή η τάξη τής κυκλικής ομάδας $\mathcal{K}_i$ (αντιστοίχως τής $\mathcal{H}_i$) ισούται με $p[\mathcal{K}_i^p : 1]$ (αντιστοίχως με $p[\mathcal{H}_i^p : 1]$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε i, $1 \leq i \leq s'$, οι τάξεις των κυκλικών ομάδων $\mathcal{K}_i$ και $\mathcal{H}_i$ είναι ίσες και ως εκ τούτου $\forall i, 1 \leq i \leq s', \mathcal{K}_i \cong \mathcal{H}_i$. Υπολείπεται η απόδειξη ότι $s = t$, αφού ήδη γνωρίζουμε ότι οι ομάδες $\mathcal{K}_{s'+1}$, $\mathcal{K}_{s'+2}, \ldots, \mathcal{K}_s$ και $\mathcal{H}_{s'+1}, \mathcal{H}_{s'+2}, \ldots, \mathcal{H}_t$ είναι κυκλικές τάξης p και ως εκ τούτου ισόμορφες μέταξύ τους.

Θέτουμε $G_{\mathcal{K}}$ για το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_{s'}$ και $G_{\mathcal{H}}$ για το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_{s'}$.

Τώρα $G_{\mathcal{K}} \cong G_{\mathcal{H}}$ και η ομάδα G είναι ισόμορφη με τα εξωτερικά ευθέα γινόμενα

$$G_{\mathcal{K}} \times \mathcal{K}_{s'+1} \times \mathcal{K}_{s'+2} \times \cdots \times \mathcal{K}_s \text{ και } G_{\mathcal{H}} \times \mathcal{H}_{s'+1} \times \mathcal{H}_{s'+2} \times \cdots \times \mathcal{H}_t.$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$[G_{\mathcal{K}} : 1]p^{s-s'} = [G : 1] = [G_{\mathcal{H}} : 1]p^{t-s'}$$

και αφού $[G_{\mathcal{K}} : 1] = [G_{\mathcal{H}} : 1]$, συμπεραίνουμε ότι $p^{s-s'} = p^{t-s'}$ και τελικώς $s = t$. □

Διαμερίσεις

Για να δούμε το πώς ακριβώς εφαρμόζεται η ανωτέρω πρόταση χρειαζόμαστε τον εξής πολύ γνωστό ορισμό.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $n \in \mathbb{N}$ ένας φυσικός αριθμός. Κάθε ακολουθία $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$ φυσικών αριθμών ονομάζεται μια *διαμέριση* τού n αν,

$$n = \sum_{i=1}^{t} m_i \text{ και } m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_i \geq m_{i+1} \geq \cdots \geq m_t.$$

Έτσι, οι διαμερίσεις τού 3 είναι οι ακολουθίες $\delta_1(3) = (3), \delta_2(3) = (2,1)$ και $\delta_3(3) = (1,1,1)$, τού 4 είναι οι ακολουθίες $\delta_1(4) = (4), \delta_2(4) = (3,1,1), \delta_3(4) = (2,2), \delta_4(4) = (2,1,1)$ και $\delta_5(4) = (1,1,1,1)$.

Έστω $P(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων τού φυσικού n και $\Delta(n) = \{\delta_i(n) \mid i = 1, 2, \ldots, P(n)\}$ οι διαμερίσεις του. Διατάσσουμε τα στοιχεία τού $\Delta(n)$ κατά την αντίστροφη λεξικογραφική διάταξη «$\preceq$» και σχηματίζουμε με αυτά έναν πίνακα, που κάθε γραμμή του είναι ένα στοιχείο τού $\Delta(n)$. Η διάταξη των γραμμών τού πίνακα είναι τέτοια ώστε αν, το $\delta(n)$ είναι η i-οστή γραμμή και $\delta'(n)$ είναι j-οστή με $j \leq i$, τότε $\delta'(n) \preceq \delta(n)$.

Ο συγκεκριμένος πίνακας είναι μοναδικός, ονομάζεται *πίνακας Young*. Θα τον συμβολίζουμε με $Y(n)$.

Το πλήθος των στοιχείων τής στήλης τού $Y(n)$ με τα περισσότερα στοιχεία ισούται με το πλήθος $P(n)$ των διαμερίσεων τού φυσικού n.
Επί παραδείγματι,

$$Y(3) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \cline{1-2} 3 & & \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad Y(4) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & \\ \cline{1-3} 2 & 2 & & \\ \cline{1-2} 3 & 1 & & \\ \cline{1-2} 4 & & & \\ \cline{1-1}\end{array} \text{ και } Y(5) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 & \\ \cline{1-4} 2 & 2 & 1 & & \\ \cline{1-3} 3 & 1 & 1 & & \\ \cline{1-3} 3 & 2 & & & \\ \cline{1-2} 4 & 1 & & & \\ \cline{1-2} 5 & & & & \\ \cline{1-1}\end{array},$$

$P(3) = 3, P(4) = 5$ και $P(5) = 7$.

Πρόταση 3.2.5. *Έστω ότι q είναι ένας πρώτος αριθμός και ότι n είναι ένας φυσικός αριθμός. Το πλήθος $f_G(q^n)$ των μη ισόμορφων αβελιανών p–ομάδων $(G, \star)$ τάξης q^n ισούται με το πλήθος $P(n)$ των διαμερίσεων τού n.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\Delta(n)$ είναι το σύνολο των διαμερίσεων τού φυσικού n και ότι $\mathcal{C}(n)$ είναι το σύνολο των εξωτερικών ευθέων γινομένων $C_{q^{m_1}} \times C_{q^{m_2}} \times \cdots \times C_{q^{m_t}}$ όπου $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$ είναι μια διαμέριση τού n. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.4 (β′), οι ομάδες που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{C}(n)$ δεν είναι ισόμορφες. Παρατηρούμε ότι τα $\Delta(n)$ και $\mathcal{C}(n)$ βρίσκονται σε μια «$1-1$» και «επί» αντιστοιχία.
Λόγω τής Πρότασης 3.2.4 (α′), γνωρίζουμε ότι κάθε αβελιανή ομάδα G τάξης q^n είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων C_{q^m} που καθεμιά τους έχει ως τάξη μια δύναμη q^m τού q, ας πούμε $G \cong C_{q^{m_1}} \times C_{q^{m_2}} \times \cdots \times C_{q^{m_t}}$. Συνεπώς, $q^n = q^{m_1+m_2+\cdots+m_t}$ και γι’ αυτό $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_t$. Επιπλέον, μπορούμε να διατάξουμε τους παράγοντες τού εξωτερικού ευθέος γινομένου κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $q^{m_1} \geq q^{m_2} \geq \cdots \geq q^{m_t}$. Συνεπώς, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_t$ και γι’ αυτό τώρα, η ακολουθία $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$ είναι μια διαμέριση τού n. Επομένως, κάθε αβελιανή ομάδα G τάξης q^n είναι ισόμορφη με ακριβώς μία από τις ομάδες τού συνόλου $\mathcal{C}(n)$. Το πλήθος των στοιχείων τού $\mathcal{C}(n)$ ισούται με $P(n)$, δηλαδή το πλήθος των διαμερίσεων τού n. Συνεπώς, $f_G(q^n) = P(n)$. □

Παρατήρηση 3.2.1. Προσέξτε ότι ο πρώτος q δεν επηρεάζει καθόλου το πλήθος $f_G(q^n)$ των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων G τάξης q^n. Το πλήθος $f_G(13^{200})$ των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων G τάξης 13^{200} είναι το ίδιο με το πλήθος $f_G(541^{200})$ των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων G τάξης 541^{200}. Το πλήθος αυτό είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων τού 200, δηλαδή με $P(200)$ και το $P(200)$ είναι ίσο με 3972999029388. Ένας αρκετά μεγάλος αριθμός!

Παραδείγματα 3.2.1. Ας δούμε με ποιες ομάδες μπορεί να είναι ισόμορφη μια αβελιανή ομάδα G τάξης q^3, όπου ο q είναι πρώτος αριθμός. Από τον αντίστοιχο πίνακα

Υ(3) έχουμε ότι η G είναι ισόμορφη με ακριβώς μία από τις

$$C_q^3, \quad C_q^2 \times C_q, \quad C_q \times C_q \times C_q.$$

Ενώ μια αβελιανή ομάδα G τάξης q^5, όπου ο q πρώτος αριθμός, είναι ισόμορφη με ακριβώς μία από τις

$$C_{q^5}, \quad C_{q^4} \times C_q, \quad C_{q^3} \times C_{q^2}, \quad C_{q^3} \times C_q \times C_q \quad C_{q^2} \times C_{q^2} \times C_q$$
$$C_{q^2} \times C_q \times C_q \times C_q \quad C_q \times C_q \times C_q \times C_q \times C_q.$$

Πρόταση 3.2.6. *Έστω ότι n είναι ένας φυσικός αριθμός και ότι $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ είναι μια ανάλυσή του σε γινόμενο θετικών δυνάμεων πρώτων αριθμών $p_i, 1 \leq i \leq s$, διαφορετικών ανά δύο.*
Το πλήθος $f_G(n)$ των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων G τάξης n ισούται με το γινόμενο $P(\alpha_1) \cdot P(\alpha_s) \cdot \ldots \cdot P(\alpha_s)$, όπου $P(\alpha_i)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων τού θετικού αριθμού $\alpha_i, 1 \leq i \leq s$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1, μια αβελιανή ομάδα τάξης $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο s το πλήθος p– ομάδων με αντίστοιχες τάξεις $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_s^{\alpha_s}$. Ο ισομορφισμός είναι ανεξάρτητος από τη σειρά με την οποία εμφανίζονται οι παράγοντες στο εξωτερικό ευθύ γινόμενο. Ως εκ τούτου

$$f_G(n) = f_G(p_1^{\alpha_1}) \cdot f_G(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot f_G(p_s^{\alpha_s}) = P(\alpha_1) \cdot P(\alpha_s) \cdot \ldots \cdot P(\alpha_s),$$

αφού λόγω τής Πρότασης 3.2.5, γνωρίζουμε ότι $\forall i, 1 \leq i \leq s$, είναι $f_G(p_i^{\alpha_i}) = P(\alpha_i)$. □

Πόρισμα 3.2.7. *Έστω n ένας φυσικός αριθμός τής μορφής $n = p_1 p_2 \ldots p_s$, όπου οι $p_i, 1 \leq i \leq s$ είναι πρώτοι αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο.*
Κάθε αβελιανή ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα C_n τάξης n.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση γνωρίζουμε ότι

$$f_G(n) = P(1) \cdot P(1) \cdot \ldots \cdot P(1) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1 (s \text{ το πλήθος παράγοντες }).$$

Ώστε, υπάρχει (με ακρίβεια ισομορφισμού) μόνο μία αβελιανή ομάδα τάξης n. Προφανώς, αυτή η ομάδα είναι η κυκλική C_n τάξης n. □

Παραδείγματα 3.2.2. Πόσες μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες G τάξης 600 υπάρχουν;
Η ανάλυση τού 600 σε δυνάμεις πρώτων είναι η $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Συνεπώς, $f_G(600) = P(3) \cdot P(1) \cdot P(2) = 6$.

Κάθε αβελιανή ομάδα τάξης 600 είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο από τρεις p–ομάδες με αντίστοιχες τάξεις 2^3, 3 και 5^2. Γι' αυτό κάθε αβελιανή ομάδα G τάξης 600 είναι ισόμορφη με μια από τις επόμενες ομάδες:

$$\begin{array}{lll} C_{2^3} \times C_3 \times C_{5^2}, & C_{2^2} \times C_2 \times C_3 \times C_{5^2}, & C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_{5^2}, \\ C_{2^3} \times C_3 \times C_5 \times C_5, & C_{2^2} \times C_2 \times C_3 \times C_5 \times C_5, & C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_5 \times C_5. \end{array}$$

Αλλά και το πλήθος των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων G τάξης p^3qr^2, όπου p, q, r είναι οποιοιδήποτε πρώτοι αριθμοί, διαφορετικοί ανά δύο, είναι επίσης 6 και κάθε τέτοια ομάδα είναι ισόμορφη με μια από τις

$$\begin{array}{lll} C_{p^3} \times C_q \times C_{r^2}, & C_{p^2} \times C_p \times C_q \times C_{r^2}, & C_p \times C_p \times C_p \times C_q \times C_{r^2}, \\ C_{p^3} \times C_q \times C_r \times C_r, & C_{p^2} \times C_p \times C_q \times C_r \times C_r, & C_p \times C_p \times C_p \times C_q \times C_r \times C_r. \end{array}$$

Τα ανωτέρω συνοψίζονται στο

Θεώρημα 3.2.8 (Το Θεώρημα Ταξινόμησης των πεπερασμένων αβελιανών Ομάδων). *Κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο κυκλικών p–ομάδων. Το πλήθος των παραγόντων του εξωτερικού ευθέος γινομένου καθώς και οι τάξεις των κυκλικών ομάδων προσδιορίζονται μοναδικά από την ομάδα.*
Αν η τάξη τής αβελιανής ομάδας είναι $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, όπου οι $p_i, 1 \leq i \leq s$ είναι πρώτοι αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο και οι $\alpha_i, 1 \leq i \leq s$ είναι φυσικοί, τότε το πλήθος των μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων τάξης n είναι $\prod_{i=1}^{s} P(\alpha_i)$, όπου $P(\alpha_i), 1 \leq i \leq s$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων τού $\alpha_i, 1 \leq i \leq s$.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης «Θεωρία Ομάδων». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1250.

Σημείωμα Αδειοδότησης