ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Θεωρία Ομάδων

Ενότητα: Το Θεώρημα Jordan–Hölder

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα Jordan–Hölder

3.1 Προκαταρκτικές Έννοιες

3.1.1 Υποορθόθετες και ορθόθετες Σειρές για μια Ομάδα

Ορισμός 3.1.1. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\} \qquad (*)$$

είναι μια πεπερασμένη ακολουθία υποοομάδων τής G.
Η ακολουθία (*) ονομάζεται μια *υποορθόθετη σειρά* για την G, αν για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, η G_i είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G_{i-1}.
Η ακολουθία (*) ονομάζεται μια *ορθόθετη σειρά* για την G, αν για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, η G_i είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G.
Οι υποομάδες G_i, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ονομάζονται οι *όροι* τής σειράς. Οι πηλικοομάδες G_i/G_{i+1}, $0 \leq i \leq r-1$ ονομάζονται οι *παράγοντες* τής σειράς.

Λέμε ότι μια υποορθόθετη (αντιστοίχως ορθόθετη) σειρά (*), *δεν διαθέτει επαναλήψεις* αν, για κάθε $i, 1 \leq i \leq r-1$, η G_i περιέχει γνήσια την G_{i+1}, διαφορετικά λέμε ότι η (*) *διαθέτει επαναλήψεις*..

Προφανώς, καθε ορθόθετη σειρά για την G είναι και μια υποορθόθετη σειρά για την G. Ωστόσο, κάθε υποορθόθετη σειρά για μια ομάδα δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί και μια ορθόθετη σειρά για την G.

Παραδείγματα 3.1.1. (α′) Έστω $G = \langle x \rangle$ μια κυκλική ομάδα. Οι σειρές

$$G \geq \langle x^2 \rangle \geq \{e_G\} \text{ και } G \geq \langle x^3 \rangle \geq \{e_G\}$$

είναι υποορθόθετες και ταυτοχρόνως ορθόθετες σειρές για την G.

Γενικότερα, κάθε πεπερασμένη ακολουθία

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\}$$

υποομάδων μιας αβελιανής ομάδας G είναι μια υποορθόθετη και ταυτοχρόνως μια ορθόθετη σειρά για την G.

(β′) Θεωρούμε την εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_4$ τής συμμετρικής ομάδας $(S_4, \circ)$ και την ακολουθία

$$\mathbb{A}_4 \geq V \geq H \geq \{\mathrm{Id}_{S_4}\}, \tag{**}$$

όπου $V = \big\{\mathrm{Id}_{S_4}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\big\}$ και $H = \big\{\mathrm{Id}_{S_4}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\big\}$.

Η V είναι ορθόθετη υποομάδα τής S_4 επειδή είναι ένωση τής κλάσης συζυγίας τού στοιχείου $\mathrm{Id}_{S_4}\}$ και τής κλάσης συζυγίας τού στοιχείου $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$. Επομένως, η V είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\mathbb{A}_4$.

Η H είναι ορθόθετη υποομάδα τής V, αφού η V είναι αβελιανή. Ωστόσο, η H δεν είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\mathbb{A}_4$, αφού το στοιχείο

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \circ \big(\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\big) \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} \notin H.$$

Επομένως, η (**) είναι μια υποορθόθετη σειρά για την $\mathbb{A}_4$, η οποία δεν είναι ορθόθετη.

Ορισμός 3.1.2. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι

$$G = K_0 \geq K_1 \geq \cdots \geq K_r = \{e_G\} \tag{I}$$
$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_s = \{e_G\} \tag{II}$$

είναι δύο υποορθόθετες (αντιστοίχως ορθόθετες) σειρές για την G.
Η σειρά (II) ονομάζεται μια *υποορθόθετη* (αντιστοίχως *ορθόθετη*) *εκλέπτυνση* τής (I), αν, η οικογένεια $\{K_0, K_1, \ldots, K_r\}$ των όρων τής (I) περιέχεται στην οικογένεια $\{H_0, H_1, \ldots, H_s\}$ των όρων τής (II).

Παραδείγματα 3.1.2. Έστω η κυκλική ομάδα $G = \langle x \rangle$ τάξης 48 και οι ορθόθετες σειρές

$$G = \langle x \rangle \geq \langle x^6 \rangle \geq \langle x^{24} \rangle \geq \{e_G\}, \tag{*}$$
$$G = \langle x \rangle \geq \langle x^3 \rangle \geq \langle x^6 \rangle \geq \langle x^{12} \rangle \geq \langle x^{24} \rangle \geq \{e_G\}, \tag{**}$$
$$G = \langle x \rangle \geq \langle x^2 \rangle \geq \langle x^6 \rangle \geq \langle x^{12} \rangle \geq \{e_G\}, \tag{***}$$

Η (**) αποτελεί εκλέπτυνση τής (*). Η (***) δεν αποτελεί εκλέπτυνση τής (*) και η (**) δεν αποτελεί εκλέπτυνση τής (***).

Ορισμός 3.1.3. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι

$$G = K_0 \geq K_1 \geq \cdots \geq K_r = \{e_G\} \tag{I}$$
$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_s = \{e_G\} \tag{II}$$

είναι δύο υποορθόθετες (αντιστοίχως ορθόθετες) σειρές για την G.
Οι υποορθόθετες (αντιστοίχως ορθόθετες) σειρές (I) και (II) ονομάζονται *ισόμορφες* αν, υπάρχει μια «1—1» και «επί» αντιστοιχία ϕ από την οικογένεια $\{K_i/K_{i+1}, 0 \leq i \leq r-1\}$ των παραγόντων τής (I) στην οικογένεια $\{H_j/H_{j+1}, 0 \leq j \leq s-1\}$ των παραγόντων τής (II), τέτοια ώστε $\forall i, 0 \leq i \leq r-1$ ο παράγοντας (K_i/K_{i+1}) να είναι ισόμορφος (ως ομάδα) με τον παράγοντα $\phi(K_i/K_{i+1})$

Παραδείγματα 3.1.3. Έστω η κυκλική ομάδα $G = \langle x \rangle$ τάξης 12 και οι ορθόθετες σειρές

$$G = \langle x \rangle \geq \langle x^2 \rangle \geq \langle x^4 \rangle \geq \{e_G\}, \tag{*}$$
$$G = \langle x \rangle \geq \langle x^3 \rangle \geq \langle x^6 \rangle \geq \{e_G\}. \tag{**}$$

Η (*) είναι ισόμορφη τής (**), αφού το σύνολο των παραγόντων τής (*) είναι το

$$\left\{ \langle x \rangle / \langle x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \;\; \langle x^2 \rangle / \langle x^4 \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \;\; \langle x^4 \rangle / \{e_G\} \cong \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

και το σύνολο των παραγόντων τής (**) είναι το

$$\left\{ \langle x \rangle / \langle x^3 \rangle \cong \mathbb{Z}_3, \;\; \langle x^3 \rangle / \langle x^6 \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \;\; \langle x^6 \rangle / \{e_G\} \cong \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

3.2 Το Θεώρημα Εκλέπτυνσης Schreier

Θα αποδείξουμε ότι δύο οποιεσδήποτε υποορθόθετες (αντιστοίχως ορθόθετες) σειρές μιας ομάδας διαθέτουν ισόμορφες εκλεπτύνσεις.

3.2.1 Το Λήμμα τής Πεταλούδας

Αρχίζουμε με το εξής πολύ απλό:

Λήμμα 3.2.1. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι A, B, C είναι υποομάδες τής G με την $B \trianglelefteq C$ ορθόθετη υποομάδα τής C. Τότε*

(α′) *η $A \cap B$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής $A \cap C$,*

(β′) *επιπλέον αν $A \trianglelefteq G$, τότε η AB είναι υποομάδα τής AC και μάλιστα $AB \trianglelefteq AC$.*

Απόδειξη. (α′) Έστω ότι $x \in A \cap C$ και $y \in A \cap B$. Τότε $xyx^{-1} \in A$ και $xyx^{-1} \in$, αφού $B \trianglelefteq C$. Επομένως, $A \cap B \trianglelefteq A \cap C$.

(β') Αφού η A είναι ορθόθετη υποομάδα τής G, οι AB και AC είναι υποομάδες τής G και προφανώς $AB \leq AC$. Υπολείπεται η απόδειξη ότι $AB \trianglelefteq AC$.
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $a \in A$, $c \in C$ είναι $(ac)AB(ac)^{-1} = AB$. Έχουμε:

$$(ac)AB(ac)^{-1} = ((ac)A)Bc^{-1}a^{-1} = ((Aa)c)Bc^{-1}a^{-1} = A(cBc^{-1})a^{-1} =$$
$$(AB)a^{-1} = B(Aa^{-1}) = BA = AB,$$

αφού $\forall x \in G$, $xA = Ax$ και $\forall c \in C$, $cB = Bc$. □

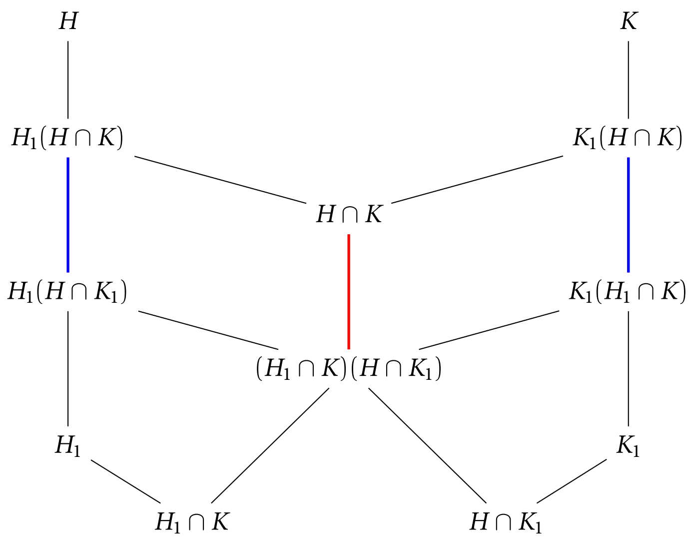
Λήμμα 3.2.2 (Το Λήμμα τής Πεταλούδας, Zassenhaus). *Έστω ότι H_1, H και K_1, K είναι υποομάδες μιας ομάδας $(G, \star)$ με $H_1 \trianglelefteq H$ και $K_1 \trianglelefteq K$. Τότε*

$$H_1(H \cap K_1) \trianglelefteq H_1(H \cap K)$$
$$K_1(K \cap H_1) \trianglelefteq K_1(K \cap H)$$

και υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\frac{H_1(H \cap K)}{H_1(H \cap K_1)} \cong \frac{K_1(K \cap H)}{K_1(K \cap H_1)}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το επόμενο διάγραμμα υποομάδων τής G, στο οποίο όταν δύο υποομάδες συνδέονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα, τότε αυτή που βρίσκεται στο χαμηλότερο άκρο τού ευθύγραμμου τμήματος είναι υποομάδα εκείνης που βρίσκεται στο υψηλότερο άκρο.



Παρατηρούμε ότι επειδή $K_1 \trianglelefteq K \leq G$ και $H \leq G$ έπεται, από το Λήμμα 3.2.1(α'), ότι $H \cap K_1 \trianglelefteq H \cap K$ και παρομοίως συμπεραίνουμε ότι $K \cap H_1 \trianglelefteq K \cap H$.

Τώρα επειδή $H \cap K_1 \trianglelefteq H \cap K \leq H$ και $H_1 \trianglelefteq H$, έπεται, από το Λήμμα 3.2.1(β'), ότι $H_1(H \cap K_1) \trianglelefteq H_1(H \cap K)$.

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι $K_1(K \cap H_1) \trianglelefteq K_1(K \cap H)$.
Επειδή $H_1 \cap K \trianglelefteq H \cap K$ και $H \cap K_1 \trianglelefteq H \cap K$, συμπεραίνουμε ότι $(H_1 \cap K)(H \cap K_1) \trianglelefteq H \cap K$.

Θα δείξουμε ότι

$$(H_1 \cap K)(H \cap K_1) = (H \cap K) \cap [H_1(H \cap K_1)]. \qquad (*)$$

Αφού $(H_1 \cap K) \leq H_1$ έπεται $(H_1 \cap K)(H \cap K_1) \leq H_1(H \cap K_1)$. Αφού $H_1 \cap K \leq H \cap K$ και $H \cap K_1 \leq H \cap K$ έπεται $(H_1 \cap K)(H \cap K_1) \leq H \cap K$. Συνεπώς,

$$(H_1 \cap K)(H \cap K_1) \leq (H \cap K) \cap [H_1(H \cap K_1)].$$

Υπολείπεται η απόδειξη ότι

$$(H \cap K) \cap [H_1(H \cap K_1)] \leq (H_1 \cap K)(H \cap K_1).$$

Έστω $\alpha \in (H \cap K) \cap [H_1(H \cap K_1)]$. Τότε $\alpha \in H \cap K$ και $\alpha \in H_1(H \cap K_1)$. Επομένως, $\alpha = \beta\gamma$ με $\beta \in H_1, \gamma \in H \cap K_1$. Επομένως, το $\beta = \gamma^{-1}\alpha$ ανήκει στο $H_1 \cap K$ και γι' αυτό το α ανήκει στο $(H_1 \cap K)(H \cap K_1)$.

Θέτοντας $A = H \cap K$ και $B = H_1(H \cap K_1)$, διαπιστώνουμε ότι

$$AB = [(H \cap K)H_1](H \cap K_1) = [H_1(H \cap K)](H \cap K_1) = H_1[(H \cap K)(H \cap K_1)] = H_1(H \cap K),$$

αφού $H_1 \trianglelefteq H$ και $H \cap K_1 \leq H \cap K$.

Θεωρούμε την πηλικοομάδα

$$\frac{H_1(H \cap K)}{H_1(H \cap K_1)} = \frac{AB}{B},$$

η οποία είναι, ως γνωστόν, ισόμορφη με την

$$\frac{A}{A \cap B} = \frac{H \cap K}{(H \cap K) \cap [H_1(H \cap K_1)]} = \frac{H \cap K}{(H_1 \cap K)(H \cap K_1)},$$

αφού, λόγω τής (*), $(H_1 \cap K)(H \cap K_1) = (H \cap K) \cap [H_1(H \cap K_1)]$.

Χρησιμοποιώντας την αριστερή πλευρά τού σχήματος τής πεταλούδας αποδείξαμε ότι

$$\frac{H_1(H \cap K)}{H_1(H \cap K_1)} \cong \frac{H \cap K}{(H_1 \cap K)(H \cap K_1)}.$$

Εντελώς ανάλογα, χρησιμοποιώντας την δεξιά πλευρά τού σχήματος τής πεταλούδας αποδεικνύεται ότι

$$\frac{K_1(K \cap H)}{K_1(K \cap H_1)} \cong \frac{H \cap K}{(H_1 \cap K)(H \cap K_1)}$$

και γι' αυτό τελικά παίρνουμε

$$\frac{H_1(H \cap K)}{H_1(H \cap K_1)} \cong \frac{K_1(K \cap H)}{K_1(K \cap H_1)}.$$

□

Θεώρημα 3.2.1 (Το Θεώρημα Εκλέπτυνσης Schreier). *Δύο οποιεσδήποτε υποορθόθετες (αντιστοίχως ορθόθετες) σειρές μιας ομάδας $(G, \star)$ διαθέτουν ισόμορφες εκλεπτύνσεις.*

Απόδειξη. Έστω ότι

$$G = K_0 \geq K_1 \geq \cdots \geq K_i \geq K_{i+1} \geq \cdots \geq K_r = \{e_G\} \qquad \text{(I)}$$
$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_j \geq H_{j+1} \geq \cdots \geq H_s = \{e_G\} \qquad \text{(II)}$$

είναι δύο υποορθόθετες (αντιστοίχως ορθόθετες) σειρές τής ομάδας G.

Θα εκλεπτύνουμε την (I) σε μια νέα υποορθόθετη σειρά (I′). Ορίζουμε $K_{i,j} = (K_i \cap H_j)K_{i+1}, 0 \leq j \leq s, 0 \leq i \leq r-1$ και παρατηρούμε ότι $K_{i,j} \leq K_i$, αφού $K_{i+1} \trianglelefteq K_i$ και $K_i \cap H_j \leq K_i$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
&K_{i,0} = (K_i \cap H_0)K_{i+1} = K_i,\\
&K_{i,j} = (K_i \cap H_j)K_{i+1} \geq K_{i,j+1} = (K_i \cap H_{j+1})K_{i+1}, \forall j, 0 \leq j \leq s\\
&\text{και } K_{i,s} = (K_i \cap H_s)K_{i+1} = K_{i+1} = K_{i+1,0}.
\end{aligned}$$

Έτσι επιτυγχάνουμε μια εκλέπτυνση τής (I)

$$K_i = K_{i,0} \geq K_{i,1} \geq \cdots \geq K_{i,s} = K_{i+1}$$

μεταξύ των όρων K_i και K_{i+1}.

Παρατηρούμε ακόμη ότι για i με $0 \leq i \leq r-2$, έχουμε $K_{i,s} = (K_i \cap H_s)K_{i+1} = K_{i+1} = K_{i+1,0}$, και γι' αυτό μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους $K_{i,s}$. Έτσι το πλήθος των όρων $K_{i,j}$ τής (I′) ισούται με το άθροισμα $(r-1)s$ όρων (όταν $0 \leq i \leq r-2$) συν $(s+1)$ όρων (όταν $i = r-2$). Δηλαδή, η (I′) διαθέτει συνολικά $rs+1$ όρους.

Τώρα εργαζόμενοι παρομοίως εκλεπτύνουμε την (II) σε μια νέα υποορθόθετη σειρά (II′). Ορίζουμε $H_{i,j} = (H_j \cap K_i)H_{j+1}, 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s-1$ και παρατηρούμε ότι $H_{i,j} \leq H_j$, αφού $H_{j+1} \trianglelefteq H_j$ και $H_j \cap K_i \leq H_j$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
&H_{0,j} = (H_j \cap K_0)H_{j+1} = H_j,\\
&H_{i,j} = (H_j \cap K_i)H_{j+1} \geq H_{i+1,j} = (H_j \cap K_{i+1})H_{j+1}\\
&\text{και } H_{r,j} = (H_j \cap K_r)H_{j+1} = H_{j+1} = H_{0,j+1}.
\end{aligned}$$

Έτσι επιτυγχάνουμε μια εκλέπτυνση τής (II)

$$H_j = H_{0,j} \geq H_{1,j} \geq \cdots \geq H_{r,j} = H_{j+1}$$

μεταξύ των όρων H_j και H_{j+1}.

Παρατηρούμε ακόμη ότι για j με $0 \leq j \leq s-2$, έχουμε $H_{r,j} = (H_j \cap K_r)H_{j+1} = H_{j+1} = H_{0,j+1}$ και γι' αυτό μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους $H_{r,j}$. Έτσι το πλήθος των όρων $H_{i,j}$ τής (II′) ισούται με το άθροισμα $(s-1)r$ όρων (όταν $0 \leq j \leq s-2$) συν $(r+1)$ όρων (όταν $j = s-1$). Δηλαδή, η (II′) διαθέτει συνολικά $sr+1$ όρους.

Συνεπώς, οι δύο εκλεπτύνσεις διαθέτουν το ίδιο πλήθος όρων.

Τέλος παρατηρούμε ότι, λόγω τού Λήμματος τής Πεταλούδας, βλ. Λήμμα 3.2.2, οι (I′) και (II′) είναι ισόμορφες, αφού

$$\forall i, 0 \leq i \leq r-1, \text{ και } \forall j, 0 \leq j \leq s-1 \text{ είναι } \frac{K_{i,j}}{K_{i,j+1}} \cong \frac{H_{i,j}}{H_{i,j+1}}.$$

Στην περίπτωση που οι αρχικές σειρές (I) και (II) ήταν ορθόθετες, τότε και οι εκλεπτύνσεις τους (I′) και (II′) είναι επίσης ορθόθετες, επειδή οι υποομάδες $K_{i,j} = (K_i \cap H_j)K_{i+1}$ και $H_{i,j} = (H_j \cap K_i)H_{j+1}$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής G, αφού οι $K_i \cap H_j$, K_{i+1}, $H_j \cap K_i$, H_{j+1} είναι για κάθε i και j, ορθόθετες υποομάδες τής G. □

Παραδείγματα 3.2.1. Θεωρούμε την κυκλική ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$ και τις ορθόθετες σειρές

$$\mathbb{Z} \geq \langle 2 \rangle \geq \langle 4 \rangle \geq \{0\},$$
$$\mathbb{Z} \geq \langle 5 \rangle \geq \langle 10 \rangle \geq \{0\}.$$

Οι δύο προηγούμενες σειρές διαθέτουν αντιστοίχως τις επόμενες εκλεπτύνσεις

$$\mathbb{Z} \geq \langle 2 \rangle \geq \langle 4 \rangle \geq \langle 20 \rangle \geq \langle 40 \rangle \geq \{0\},$$
$$\mathbb{Z} \geq \langle 5 \rangle \geq \langle 10 \rangle \geq \langle 20 \rangle \geq \langle 40 \rangle \geq \{0\}.$$

Οι συγκεκριμένες εκλεπτύνσεις είναι ισόμορφες, αφού η οικογένεια παραγόντων τής πρώτης είναι το $\{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}\}$ και η οικογένεια παραγόντων τής δεύτερης είναι το $\{\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}\}$

Ορισμός 3.2.1. Μια *συνθετική σειρά* (αντιστοίχως *κυρίαρχη σειρά*) για μια ομάδα G, είναι μια υποορθόθετη (αντιστοίχως ορθόθετη) σειρά χωρίς επαναλήψεις, τής οποίας κάθε εκλέπτυνση με περισσότερους όρους οφείλει να περιέχει επαναλήψεις. Οι παράγοντες μια συνθετικής (αντιστοίχως κυρίαρχης) σειράς

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_r = \{e_G\} \qquad (*)$$

ονομάζονται *οι συνθετικοί* (αντιστοίχως *οι κυρίαρχοι*) *παράγοντες* τής (*).

Υπάρχουν ομάδες που δεν διαθέτουν ούτε συνθετικές ούτε κυρίαρχες σειρές. Ωστόσο, κάθε πεπερασμένη ομάδα διαθέτει και συνθετικές και κυρίαρχες σειρές, αφού οποιαδήποτε εκλέπτυνση χωρίς επαναλήψεις τής σειράς $G \geq e_G$ οφείλει να περατώνεται κατόπιν ενός πεπερασμένου πλήθους βημάτων.

Παραδείγματα 3.2.2. (α′) Η άπειρη κυκλική ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$ δεν διαθέτει ούτε συνθετικές ούτε κυρίαρχες σειρές.

Έστω ότι η

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle > \langle n_1 \rangle > \langle n_2 \rangle > \cdots > \langle n_s \rangle > \{0\}, n_i \in \mathbb{N}, \forall i, i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (*)$$

είναι μια υποορθόθετη και συνεπώς ορθόθετη σειρά χωρίς επαναλήψεις για την άπειρη κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}$. Τότε η

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle > \langle n_1 \rangle > \langle n_2 \rangle > \cdots > \langle n_s \rangle > \langle 2n_s \rangle > \{0\}$$

είναι μια εκλέπτυνση τής (*) χωρίς επαναλήψεις.
Γι' αυτό καμιά υποορθόθετη και συνεπώς ορθόθετη σειρά για την ομάδα $\mathbb{Z}$ δεν είναι ούτε συνθετική ούτε κυρίαρχη.

(β′) Η σειρά

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle [1]_{12} \rangle > \langle \langle [3]_{12} \rangle > \langle [6]_{12} \rangle > \{0\}$$

είναι κυρίαρχη και προφανώς συνθετική, αφού πρόκειται για μια ορθόθετη σειρά, όπου οι τάξεις των παραγόντων της είναι

$$[\langle [1]_{12} \rangle : \langle [3]_{12} \rangle] = 3, \quad [\langle [3]_{12} \rangle : \langle [6]_{12} \rangle] = 2, \quad [\langle [6]_{12} \rangle : \{0\} \rangle] = 2. \qquad (*)$$

Αφού η τάξη κάθε παράγοντα είναι πρώτος αριθμός είναι προφανές ότι κάθε γνήσια εκλέπτυνση τής (*) οφείλει να περιέχει επαναλήψεις.

(γ′) Η υποορθόθετη σειρά τής $\mathbb{A}_4$

$$\mathbb{A}_4 \geq V \geq H \geq \{\mathrm{Id}_{S_4}\}, \qquad (**)$$

βλ. Παράδειγμα 3.1.1(β'), είναι μια συνθετική σειρά. Πράγματι, για τις τάξεις των παραγόντων τής σειράς έχουμε

$$[\mathbb{A}_4 : V] = 3, \quad [V : H] = 2, \quad [H : \mathrm{Id}_{S_4}] = 2.$$

Αφού λοιπόν αυτές οι τάξεις είναι πρώτοι αριθμοί, έπεται ότι κάθε γνήσια εκλέπτυνση τής (**) οφείλει να περιέχει επαναλήψεις.

Θεώρημα 3.2.2 (Το Θεώρημα Jordan–Hölder). *Αν μια ομάδα $(G, \star)$ διαθέτει συνθετικές (αντιστοίχως κυρίαρχες) σειρές, τότε αυτές είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. Έστω ότι

$$G = K_0 \geq K_1 \geq \cdots \geq K_i \geq K_{i+1} \geq \cdots \geq K_r = \{e_G\} \qquad \text{(I)}$$
$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_j \geq H_{j+1} \geq \cdots \geq H_s = \{e_G\} \qquad \text{(II)}$$

είναι δύο συνθετικές (αντιστοίχως κυρίαρχες) σειρές τής ομάδας G. Σύμφωνα με το Θεώρημα Schreier, βλ. Θεώρημα 3.2.1, οι συγκεκριμένες σειρές διαθέτουν ισόμορφες εκλεπτύνσεις. Αφού όμως είναι συνθετικές (αντιστοίχως κυρίαρχες) σειρές, κάθε εκλέπτυνσή τους οφείλει να διαθέτει επαναλήψεις. Επομένως, οι (I) και (II) ήταν εξαρχής ισόμορφες, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό τού θεωρήματος. □

Παραδείγματα 3.2.3. Στο Παράδειγμα 3.2.2(β') διαπιστώσαμε ότι η

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle [1]_{12} \rangle > \langle \langle [3]_{12} \rangle > \langle [6]_{12} \rangle > \{0\}$$

είναι μια κυρίαρχη και προφανώς συνθετική σειρά, τής οποίας η οικογένεια των συνθετικών παραγόντων της είναι η

$$\{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\}.$$

Παρατηρούμε ότι και η

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle [1]_{12} \rangle > \langle \langle [2]_{12} \rangle > \langle [4]_{12} \rangle > \{0\}$$

είναι ακόμη μία κυρίαρχη και συνθετική σειρά. Η οικογένεια των συνθετικών παραγόντων της είναι η

$$\{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$$

και προφανώς οι συνθετικές και κυρίαρχες σειρές είναι ισόμορφες.

3.3 Συνθετικοί και κυρίαρχοι Παράγοντες

Για την περιγραφή τής μορφής των παραγόντων μιας συνθετικής ή κυρίαρχης σειράς θα χρειαστούμε ορισμένα στοιχεία από τα ευθέα γινόμενα ομάδων τα οποία παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα.

3.3.1 Ευθέα Γινόμενα Ομάδων

Ορισμός 3.3.1. Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες. Ονομάζουμε *εξωτερικό ευθύ γινόμενο των ομάδων* G_1 και G_2 την ομάδα $(G_1 \times G_2, \star)$, όπου $G_1 \times G_2$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των G_1 και G_2 και όπου η πράξη «$\star$» ορίζεται ως

$$\begin{aligned} &\star : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to (G_1 \times G_2)\,, \\ &((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1, g_2) \star (h_1, h_2) := (g_1 \star_1 h_1, g_2 \star_2 h_2) \end{aligned}$$

Ο προηγούμενος ορισμός γενικεύεται στο εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(\prod_{i\in I} G_i, \star)$ οποιασδήποτε οικογένειας ομάδων $((G_i, \star_i))_{i\in I}$.

Παραδείγματα 3.3.1. Η ομάδα $(\mathcal{R}, +)$ με στοιχεία τις ακολουθίες $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ των πραγματικών αριθμών και πράξη

$$+ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}, ((\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto ((\alpha_i + \beta_i)_{i\in\mathbb{N}})$$

την πρόσθεση των ακολουθιών συμπίπτει με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο τής οικογένειας ομάδων $((G_i, \star_i))_{i\in\mathbb{N}}$, όπου για κάθε δείκτη $i \in \mathbb{N}$, η ομάδα $(G_i, \star_i)$ ισούται με την ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ των πραγματικών αριθμών με πράξη τη συνηθισμένη πρόσθεση των πραγματικών.

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται σε οποιοδήποτε εισαγωγικό μάθημα άλγεβρας:

Πρόταση 3.3.1. *Έστω ότι* $(G_1, \star_1)$ *και* $(G_2, \star_2)$ *είναι δύο ομάδες.*

(α′) *Το εξωτερικό ευθύ γινόμενο* $(G_1 \times G_2, \star)$ *των* G_1 *και* G_2 *είναι μια αβελιανή ομάδα αν, και μόνο αν, οι* $(G_1, \star_1)$ *και* $(G_2, \star_2)$ *είναι αβελιανές.*

(β′) *Το εξωτερικό ευθύ γινόμενο* $(G_1 \times G_2, \star)$ *είναι ισόμορφο με το εξωτερικό ευθύ γινόμενο* $(G_2 \times G_1, \star')$.

(γ′) *Αν οι* G_1 *και* G_2 *είναι πεπερασμένες κυκλικές ομάδες με τάξεις σχετικώς πρώτες, δηλαδή με* Μ.Κ.Δ.$([G_1 : 1], [G_2 : 1]) = 1$, *τότε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο* $(G_1 \times G_2, \star)$ *είναι κυκλική ομάδα τάξης* $[G_1 : 1] \cdot [G_2 : 1]$.

Πόρισμα 3.3.1. *Έστω ότι* $((G_i, \star_i))_{i \in I}, I = \{1, 2, \ldots, s \in \mathbb{N}\}$, *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυκλικών ομάδων, όπου οι τάξεις* $[G_i : 1] = n_i$ *είναι ανά δύο σχετικώς πρώτες, δηλαδή όπου* Μ.Κ.Δ.$(n_i, n_j) = 1, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq s, i \neq j$. *Τότε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο* $(\prod_{i=1}^{s} G_i, \star)$ *τής οικογένειας* $((G_i, \star_i))_{i \in I}$ *είναι μια κυκλική ομάδα τάξης* $\prod_{i=1}^{s} n_i$.

Απόδειξη. Επαγωγή ως προς το πλήθος s των ομάδων. □

Παρατηρήσεις 3.3.1. (α′) Το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ δύο κυκλικών ομάδων $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ δεν είναι απαραιτήτως κυκλική ομάδα.

Για παράδειγμα, το εξωτερικό ευθύ γινόμενο τής κυκλικής ομάδας C_n με $n > 1$ στοιχεία, δηλαδή η $C_n \times C_n$, δεν είναι **ποτέ** μια κυκλική ομάδα, αφού η τάξη οποιουδήποτε στοιχείου $(a, b) \in C_n \times C_n$ είναι πάντοτε ένας διαιρέτης τού n (γιατί;), ενώ η τάξη της $[C_n \times C_n : 1]$ ισούται με n^2.

(β′) Είναι εύκολη η διαπίστωση ότι αν, $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες και $H_i \leq G_i, i = 1, 2$, είναι αντιστοίχως δύο υποομάδες τους, τότε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $H_1 \times H_2$ είναι μια υποομάδα τού εξωτερικού ευθέος γινομένου $G_1 \times G_2$. Ωστόσο, δεν έχει κάθε υποομάδα $H \leq G_1 \times G_2$ απαραιτήτως τη συγκεκριμένη μορφή.

Επί παραδείγματι, το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ διαθέτει ως υποομάδα την

$$\Delta = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Ωστόσο, δεν υπάρχουν υποομάδες H_1, H_2 τής $\mathbb{Z}$ με $H_1 \times H_2 = \Delta$. Αφού, αν υπήρχαν $H_1, H_2 \leq \mathbb{Z}$ με $H_1 \times H_2 = \Delta$, τότε κάθε $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ θα ήταν ίσο με κάποιο $(z, z) \in \Delta$ και γι' αυτό τελικώς θα ήταν $H_1 = H_2$. Τώρα επειδή η $\mathbb{Z}$ είναι κυκλική, έπεται ότι και η H θα ήταν κυκλική. Συνεπώς, θα υπήρχε $a \in \mathbb{Z}, a \geq 0$ με $H = \langle a \rangle$. Αλλά τώρα αφού $H \times H = \Delta$, πρέπει όλα τα στοιχεία τής H να είναι ίσα, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση όπου $H = \{0\}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η τάξη τής $H \times H$ ισούται με 1, ενώ η τάξη τής Δ είναι άπειρη.

Ορισμός 3.3.2. Τα εξωτερικά ευθέα γινόμενα $(\prod_{i=1}^{n} G_i, \star)$, όπου κάθε ομάδα G_i είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα C_p, p πρώτος αριθμός, ονομάζονται *στοιχειώδεις αβελιανές p–ομάδες*.

Προσέξτε ότι το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2, \star)$ δύο ομάδων $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ δεν έχει ως υποομάδες τις G_1 και G_2. Ωστόσο, η συγκεκριμένη «ιδιάζουσα συμπεριφορά» αίρεται με την εισαγωγή τής έννοιας τού εσωτερικού ευθέος γινομένου.

Ορισμός 3.3.3. Έστω ότι $\{G_i \mid i = 1, 2, \ldots, s\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο υποομάδων μιας ομάδας $(G, \star)$. Η G ονομάζεται το *εσωτερικό ευθύ γινόμενο* των υποομάδων G_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ αν, για κάθε $1 \leq i \leq s$, η $G_i \trianglelefteq G$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G και αν, κάθε $g \in G$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο τής μορφής $g = g_1 g_2 \ldots g_s$, όπου $g_i \in G_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$.

Υπενθυμίζουμε ότι ονομάζουμε την G γινόμενο των υποομάδων της $\{G_i \mid i = 1, 2, \ldots, s\}$, όπου $G_i \trianglelefteq G, \forall i, 1 \leq i \leq s$ αν, $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$, δηλαδή αν, κάθε στοιχείο $g \in G$ ισούται με ένα γινόμενο τής μορφής $g_1 g_2 \ldots g_s$, όπου $g \in G_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$.

Παραδείγματα 3.3.2. Η κυκλική ομάδα $(C_6 = \langle x \rangle, \star)$ τάξης 6 είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των κυκλικών υποομάδων $C_2 = \langle x^3 \rangle$ και $C_3 = \langle x^2 \rangle$ των οποίων οι τάξεις είναι 2 και 3 αντιστοίχως.

Προφανώς $C_2 \trianglelefteq C_6$ και $C_3 \trianglelefteq C_6$. Για τα στοιχεία τής C_6 έχουμε:

$$\begin{array}{lll} e_{C_6} = e_{C_6} \star e_{C_6}, & x = x^3 \star (x^2)^2, & x^2 = e_{C_6} \star x^2, \\ x^3 = x^3 \star e_{C_6}, & x^4 = e_{C_6} \star x^4, & x^5 = x^3 \star x^2. \end{array} \tag{*}$$

Συνεπώς, $C_6 = \langle x^3 \rangle \cdot \langle x^2 \rangle$. Υπολείπεται η απόδειξη ότι τα ανωτέρω γινόμενα (*) είναι μοναδικά ως γινόμενα, όπου ο πρώτος παράγοντας ανήκει στην C_2 και ο δεύτερος στην C_3. Όμως αυτό διαπιστώνεται αμέσως λαμβάνοντας υπ' όψιν την αμέσως πρόταση.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι $G_i \trianglelefteq G, 1 \leq i \leq s$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής G με $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$.*
Η ομάδα G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $G_1, G_2, \ldots, G_s$ αν, και μόνο αν, $\forall i, 2 \leq i \leq s, (G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_{i-1}) \cap G_i = \{e_G\}$.

Απόδειξη. □

Απόδειξη. «$\Leftarrow$» Σύμφωνα με τον ορισμό τού ευθέος γινομένου, υπολείπεται η απόδειξη του μοναδικού τής παράστασης κάθε στοιχείου τής G ως γινόμενο στοιχείων από τις υποομάδες $G_1, G_2, \ldots, G_s$.
Έστω ότι $g = g_1 g_2 \ldots g_s = h_1 h_2 \ldots h_s (*)$, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq s, g_i, h_i \in G_i$. Τότε $g_s h_s^{-1} = (g_1 g_2 \ldots g_{s-1})^{-1} (h_1 h_2 \ldots h_{s-1})$.

Αλλά $g_s h_s^{-1} \in G_s$ και $(g_1 g_2 \dots g_{s-1})^{-1}(h_1 h_2 \dots h_{s-1}) \in G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_{s-1}$. Επομένως, $g_s h_s^{-1} \in (G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_{s-1}) \cap G_s = \{e_G\}$ και γι' αυτό $g_s = h_s$. Τώρα η σχέση $(*)$ παίρνει τη μορφή $g = g_1 g_2 \dots g_{s-1} = h_1 h_2 \dots h_{s-1}$ από όπου ακριβώς όπως προηγουμένως συμπεραίνουμε ότι $g_{s-1}h_{s-1}^{-1} = e_G$, δηλαδή $g_{s-1} = h_{s-1}$. Συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε ότι $g_s = h_s, g_{s-1} = h_{s-1}, \dots, g_2 = h_2, g_1 = h_1$.
«$\Rightarrow$» Έστω ότι α είναι ένα στοιχείο τής G, το οποίο ανήκει στην τομή $(G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_{i-1}) \cap G_i$. Τότε $\alpha = g_1 g_2 \dots g_{i-1}$ με $g_j \in G_j, j = 1, 2, \dots i-1$ και $\alpha \in G_i$. Αλλά το α έχει μοναδική παράσταση ως γινόμενο στοιχείων $g_i \in G_i, i = 1, 2, \dots, s$. Επομένως, $\alpha = e_G$. □

Επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 3.3.2 διαπιστώνουμε τώρα ότι η C_6 είναι το εσωτερικό γινόμενο των δύο κυκλικών υποομάδων της C_2 και C_3, αφού $C_2 \cap C_3 = \{e_{C_6}\}$

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω ότι μια ομάδα $(G, \star)$ είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων της $G_1, G_2, \dots, G_s$. Τότε $\forall g_i \in G_i, g_j \in G_j$ με $i \neq j, 1 \leq i, j \leq s$ είναι $g_i g_j = g_j g_i$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1}$ ανήκει στην τομή $G_i \cap G_j = \{e_G\}$, επειδή $g_i g_j g_i^{-1} \in G_j$ και $g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in G_i$, αφού $G_i \trianglelefteq G$ και $G_j \trianglelefteq G$. Επομένως, $g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e_G$, δηλαδή $g_i g_j = g_j g_i$. □

Σχέση μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού ευθέος Γινομένου

Πρόταση 3.3.3. *Μια ομάδα $(G, \star)$ είναι το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των ομάδων $(G_i, \star_i), i = 1, 2, \dots, s$ αν, και μόνο αν, υπάρχουν ορθόθετες υποομάδες $N_i \trianglelefteq G$ τής G, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq s$ η N_i είναι ισόμορφη με την G_i έτσι, ώστε η G να ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $N_i, 1 \leq i \leq s$.*

Απόδειξη. «$\Rightarrow$» Για κάθε $i, 1 \leq i \leq s$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned}&\theta_i : G \to G,\\ &(g_1, g_2, \dots, g_s) \mapsto \theta_i((g_1, g_2, \dots, g_s)) := (g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, e_{G_i}, g_{i+1}, \dots, g_s).\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η θ_i είναι ένας ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα

$$N_i := \mathrm{Ker}\theta_i = \{(e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \mid g_i \in G_i\}.$$

Γι'αυτό $\forall i, 1 \leq i \leq s$, οι N_i είναι ορθόθετες υποομάδες τής G.
Επιπλέον, έχουμε $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s$, αφού αν, $\alpha = (g_1, g_2, \dots, g_s)$, τότε

$$\begin{aligned}&\alpha = (g_1, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \dots\\ &(e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \dots (e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \dots, g_s),\end{aligned}$$

όπου προφανώς $\forall i, 1 \leq i \leq s, n_i = (e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \in N_i$. Η συγκεκριμένη παράσταση τού α ως γινόμενο των στοιχείων $n_i \in N_i$ είναι μοναδική, αφού αν,

$$\begin{aligned}&\alpha = (h_1, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \dots\\ &(e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, h_i, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \dots (e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, e_{G_i}, e_{G_{i+1}}, \dots, h_s),\end{aligned}$$

είναι ακόμη μια παράσταση τού α ως γινόμενο στοιχείων από τις $N_i, 1 \leq i \leq s$, τότε $\alpha = (h_1, h_2, \dots, h_s)$ από όπου έπεται ότι $h_i = g_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$ και συνεπώς τα $n_i = (e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_{i-1}}, g_i, e_{G_{i+1}}, \dots, e_{G_s}) \in N_i, 1 \leq i \leq s$ με $\alpha = n_1 n_2 \dots n_i \dots n_s$ είναι μοναδικώς καθορισμένα.
«$\Leftarrow$» Έστω ότι η G ισούται με το εσωτερικό ευθύ γινόμενο $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s$ των ορθόθετων υποομάδων της $N_i \trianglelefteq G, 1 \leq i \leq s$. Θεωρούμε το εξωτερικό ευθύ γινόμενο $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_s$ των N_i και την απεικόνιση

$$\sigma : N_1 \times N_2 \cdots \times N_s \to G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s, (n_1, n_2, \dots, n_s) \mapsto n_1 n_2 \dots n_s.$$

Παρατηρούμε ότι η σ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, αφού

$$\sigma\left((n_1, n_2, \dots, n_s)(n_1', n_2', \dots, n_s')\right) = (n_1 n_1')(n_2 n_2') \dots (n_s n_s') =$$
$$(n_1 n_2 \dots n_s)(n_1' n_2' \dots n_s') = \sigma\left((n_1, n_2, \dots, n_s)\right) \sigma\left((n_1', n_2', \dots, n_s')\right),$$

αφού $n_i n_j' = n_j' n_i, \forall i, j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$. Προφανώς ο σ είναι ένας επιμορφισμός. Επιπλέον αν, $(n_1, n_2, \dots, n_s) \in \mathrm{Ker}\sigma$, τότε $n_1 n_2 \dots n_s = e_G$. Αλλά αφού η $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $N_i, 1 \leq i \leq n$, η παράσταση τού e_G ως γινόμενο στοιχείων $n_i \in N_i, 1 \leq i \leq n$ είναι μοναδική και γι' αυτό $n_i = e_G, \forall i, 1 \leq i \leq s$. Επομένως, $\mathrm{Ker}\sigma = \{(e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_2})\}$ και ο επιμορφισμός σ είναι ένας ισομορφισμός. □

Παραδείγματα 3.3.3. Η διεδρική ομάδα $(D_4, \circ)$ των στερεών κινήσεων τού τετραγώνου δεν ισούται με ένα εσωτερικό ευθύ γινόμενο δύο γνησίων υποομάδων της. Πράγματι, οι γνήσιες υποομάδες τής D_4 έχουν τάξη 1, 2 ή 4. Αν ήταν η D_4 το εσωτερικό ευθύ γινόμενο δύο υποομάδων της, τότε θα ήταν και η ίδια αβελιανή. Πράγμα άτοπο, αφού η D_4 δεν είναι αβελιανή.

Παραδείγματα 3.3.4. Έστω ότι $(S_n, \circ)$ είναι η συμμετρική ομάδα των «1–1» και «επί» απεικονίσεων από το σύνολο $N = \{1, 2, \dots, n\}$ στον εαυτό του και ότι I είναι ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο τού N.

Έστω G το υποσύνολο τής S_n που αποτελείται από τα $\sigma \in S_n$ με $\sigma(I) = I$, δηλαδή από τα στοιχεία τής S_n που απεικονίζουν το υποσύνολο I στον εαυτό του.
Προτείνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι το σύνολο G είναι μια υποομάδα τής S_n.
Έστω ότι J είναι το συνολοθεωρητικό συμπλήρωμα το I ως προς N, δηλαδή $J = N \setminus I$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία σ τής G διατηρούν το υποσύνολο J, δηλαδή $\sigma(J) = J$, επειδή αυτά διατηρούν το I και επειδή το N είναι μια αποσυνδετή[1] ένωση των υποσυνόλων I και J. Θεωρούμε το υποσύνολο H (αντιστοίχως K) τής G που αποτελείται από τα $\sigma \in G$ (αντιστοίχως $\tau \in G$) που διατηρούν σημειακά το I (αντιστοίχως σημειακά το J), δηλαδή $\sigma \in H \Leftrightarrow \forall i \in I, \sigma(i) = i$ (αντιστοίχως $\tau \in K \Leftrightarrow \forall j \in J, \tau(j) = j$).
Προτείνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει ότι τα υποσύνολα I και J είναι υποομάδες τής G. Πρόκειται μάλιστα για ορθόθετες υποομάδες τής G, αφού είναι πυρήνες των δράσεων τής G επί των συνόλων I και J, βλ. Ορισμό 1.1.3.

[1]ξένη

Ισχυριζόμαστε ότι η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων της H και K. Παρατηρούμε ότι $H \cap K = \{\mathrm{Id}_n\}$, αφού αν, $\sigma \in H \cap K$, τότε $\sigma(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in I \cup J = N$. Αν τώρα αποδείξουμε ότι κάθε $\sigma \in G$ είναι σύνθεση ενός στοιχείου από την H με ένα στοιχείο από την K, τότε από την Πρόταση 3.3.3 θα προκύψει ότι η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των H και K.

Έστω $\sigma \in G$ και μια ανάλυση του $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_t$ σε αποσυνδετούς κύκλους. Παρατηρούμε ότι κάθε κύκλος $c_\ell, \ell = 1, \ldots, t$ περιέχει ή μόνο στοιχεία από το I ή μόνο στοιχεία από το J αφού αν, σε κάποιον c_ℓ υπήρχαν στοιχεία και από το I και από το J, τότε το σ δεν θα σταθεροποιούσε το σύνολο I, πράγμα άτοπο αφού το σ είναι στοιχείο τής G. Γι' αυτό σχηματίζοντας το γινόμενο σ_I (αντιστοίχως σ_J) των κύκλων τού σ που δεν περιέχουν στοιχεία από το I (αντιστοίχως που δεν περιέχουν στοιχεία από το J), διαπιστώνουμε ότι το σ_I ανήκει στο H και το σ_J ανήκει στο K και $\sigma = \sigma_I \circ \sigma_J$.

Ώστε η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των H και K και $[G:1] = [H:1][K:1]$. Προφανώς, η H (αντιστοίχως η K) είναι ισόμορφη με την συμμετρική ομάδα S_J τού συνόλου J (αντιστοίχως με την συμμετρική ομάδα S_I τού συνόλου I) και γι' αυτό $G \cong S_J \times S_I$ και $[G:1] = (n-m)!m!$, όπου m είναι το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου I.

3.3.2 Περιγραφή συνθετικών ή κυρίαρχων Παραγόντων

Πρόταση 3.3.4. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα με $[G:1] > 1$. Αν η*

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_i > G_{i+1} > \cdots > G_r = \{e_G\} \qquad (*)$$

είναι μια συνθετική σειρά για την G, τότε κάθε συνθετικός παράγοντας $G_i/G_{i+1}, i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ είναι μια απλή ομάδα.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον δείκτη $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ η G_i/G_{i+1} δεν είναι απλή. Τότε θα υπήρχε μια γνήσια και ορθόθετη υποομάδα H τής G_i/G_{i+1}, η οποία θα περιείχε γνησίως την τετριμμένη υποομάδα G_{i+1}/G_{i+1}. Συνεπώς, θα υπήρχε μια γνήσια και ορθόθετη υποομάδα N τής G_i, η οποία θα περιέχε γνησίως την G_{i+1} με $N/G_{i+1} = H$ και ακόμα, η G_{i+1} θα ήταν ορθόθετη υποομάδα τής H, αφού $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$. Όμως τότε η υποορθόθετη σειρά

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_i > H > G_{i+1} > \cdots > G_r = \{e_G\}$$

θα ήταν μια εκλέπτυνση τής $(*)$ χωρίς επαναλήψεις και με περισσότερους όρους. Αυτό είναι αδύνατο αφού, η $(*)$ είναι μια συνθετική σειρά.
Επομένως, κάθε συνθετικός παράγοντας $G_i/G_{i+1}, i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ είναι μια απλή ομάδα. □

Πρόταση 3.3.5. *Οι συνθετικοί παράγοντες μια πεπερασμένης αβελιανής ομάδας $(G, \star)$ είναι κυκλικές ομάδες πρώτης τάξης.*

Απόδειξη. Οι συνθετικοί παράγοντες είναι πεπερασμένες αβελιανές και απλές ομάδες. Επομένως, από την Πρόταση 2.2.11 συμπεραίνουμε ότι οι συνθετικοί παράγοντες είναι κυκλικές ομάδες πρώτης τάξης. □

Παρατηρήσεις 3.3.2. Το Θεώρημα Jordan-Hölder μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση τού Θεμελιώδους Θεωρήματος τής Αριθμητικής.
Πράγματι, αν n είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, τότε θεωρούμε την κυκλική ομάδα $(\mathbb{Z}_n, +)$ και μια συνθετική σειρά της:

$$\mathbb{Z}_n = \langle a_0 \rangle > \langle a_1 \rangle > \cdots > \langle a_i \rangle > \langle a_{i+1} \rangle > \cdots > \langle a_r \rangle = \{[0]_n\},$$

Οι τάξεις $[\langle a_i \rangle : \langle a_{i+1} \rangle] = p_{i+1}$ των συνθετικών παραγόντων $\langle a_i \rangle / \langle a_{i+1} \rangle$ είναι πρώτοι αριθμοί, αφού όλοι οι συνθετικοί παράγοντες είναι κυκλικές ομάδες πρώτης τάξης. Παρατηρούμε ότι

$$\prod_1^r p_i = [\langle a_0 \rangle : \langle a_1 \rangle] \cdot [\langle a_1 \rangle : \langle a_2 \rangle] \cdot \ldots \cdot [\langle a_{r-1} \rangle : \langle a_r \rangle] = [\mathbb{Z}_n : 1] = n.$$

Συνεπώς, κάθε συνθετική σειρά τής $\mathbb{Z}_n$ χορηγεί μια ανάλυση τού n σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Αντίστροφα, κάθε ανάλυση τού n σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ας πούμε $n = \prod_1^s q_i$ χορηγεί τη συνθετική σειρά

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_n = \langle [1]_n \rangle > \langle [q_1]_n \rangle > \langle [q_1 q_2]_n \rangle > \cdots > \langle [q_1 q_2 \ldots q_i]_n \rangle > \langle [q_1 q_2 \ldots q_{i+1}]_n \rangle > \\ > \cdots > \langle [q_1 q_2 \ldots q_s]_n \rangle = \{[0]_n\},\end{aligned}$$

όπου η τάξη τού συνθετικού παράγοντα $\langle [1]_n \rangle / \langle [q_1]_n \rangle$ ισούται με $(q_1 q_2 \ldots q_s / q_2 \ldots q_s) = q_1$ και οι τάξεις των υπόλοιπων συνθετικών παραγόντων $\langle [q_1 q_2 \ldots q_i]_n \rangle / \langle [q_1 q_2 \ldots q_{i+1}]_n \rangle$ ισούνται με $(q_{i+1} q_{i+2} \ldots q_s / q_{i+2} q_{i+3} \ldots q_s) = q_{i+1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$. Αφου όμως οι παράγοντες οποιασδήποτε συνθετικής σειράς είναι μοναδικοί (με ακρίβεια ισομορφισμού), έπεται ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τής οικογένειας των πρώτων $(p_i), i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ και τής οικογένειας των πρώτων $(q_j), j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ και γι' αυτό η ανάλυση τού n σε γινόμενο πρώτων είναι μοναδική (μέχρι τη σειρά εμφάνισης των παραγόντων).

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τους κυρίαρχους παράγοντες.

Ορισμός 3.3.4. Μια ομάδα $(G, \star)$ ονομάζεται *χαρακτηριστικώς απλή* αν, $G \neq \{e_G\}$ και οι μοναδικές χαρακτηριστικές υποομάδες της είναι οι τετριμμένες υποομάδες G και $\{e_G\}$.

Πρόταση 3.3.6. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα με $[G:1] > 1$. Αν η*

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_i > G_{i+1} > \cdots > G_r = \{e_G\} \qquad (*)$$

είναι μια κυρίαρχη σειρά για την G, τότε κάθε κυρίαρχος παράγοντας $G_i/G_{i+1}, i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ είναι μια χαρακτηριστικώς απλή ομάδα.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον δείκτη $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ η G_i/G_{i+1} δεν είναι χαρακτηριστικώς απλή. Τότε θα υπήρχε μια γνήσια χαρακτηριστική υποομάδα H τής G_i/G_{i+1}, η οποία θα περιείχε γνησίως την τετριμμένη υποομάδα G_{i+1}/G_{i+1}. Λόγω τής αντιστοιχίας μεταξύ των υποομάδων τής G_i/G_{i+1} και των υποομάδων τής G_i που περιέχουν το G_{i+1}, θα υπήρχε μια γνήσια υποομάδα K τής G_i που θα περιείχε γνησίως την G_{i+1} με $H = K/G_{i+1}$. Αλλά αφού η K/G_{i+1} θα ήταν μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G_i/G_{i+1} και αφού η G_i/G_{i+1} είναι ορθόθετη υποομάδα τής G/G_{i+1}, τότε η K/G_{i+1} θα ήταν μια ορθόθετη υποομάδα τής G/G_{i+1}, βλ. Παρατήρηση 2.2.2 και έτσι η K θα ήταν μια γνήσια και ορθόθετη υποομάδα τής G, η οποία θα περιέχε γνησίως την G_{i+1}. Όμως τότε η ορθόθετη σειρά

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_i > K > G_{i+1} > \cdots > G_r = \{e_G\}$$

θα ήταν μια εκλέπτυνση χωρίς επαναλήψεις και με περισσότερους όρους τής κυρίαρχης σειράς $(*)$. Αυτό είναι αδύνατο. Επομένως, κάθε κυρίαρχος παράγοντας $G_i/G_{i+1}, i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ είναι μια χαρακτηριστικώς απλή ομάδα. □

Οι χαρακτηριστικώς απλές πεπερασμένες Ομάδες

Θεώρημα 3.3.1. *Μια πεπερασμένη και χαρακτηριστικώς απλή ομάδα $(G, \star)$ είναι ένα εσωτερικό ευθύ γινομένο από υποομάδες της, οι οποίες είναι όλες απλές και ισόμορφες.*

Απόδειξη. Έστω ότι G_1 είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G με $G_1 \neq \{e_G\}$ με τον μικρότερο αριθμό στοιχείων, δηλαδή αν μια υποομάδα $L \neq \{e_G\}$ τής G έχει λιγότερα από $[G_1 : 1]$ στοιχεία, τότε η L δεν είναι ορθόθετη υποομάδα τής G.
Θεωρούμε τώρα όλα τα εσωτερικά ευθέα γινόμενα τής μορφής $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$, όπου $G_i \cong G_1, \forall i, 2 \leq i \leq s$ και μεταξύ αυτών διαλέγουμε μια υποομάδα $H = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_r$, η οποία έχει τον μέγιστο αριθμό στοιχείων. Παρατηρούμε ότι η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, αφού είναι γινόμενο των ορθόθετων υποομάδων $G_i, 1 \leq i \leq r$ τής G.
Ισχυριζόμαστε ότι η είναι μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G. Προφανώς, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αυτομορφισμό $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ έχουμε $\phi(H) \leq H$, αφού τότε $\phi(H) = H$, διότι τα H και $\phi(H)$ είναι πεπερασμένα σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων.
Παρατηρούμε ότι για να δείξουμε $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G), \phi(H) \leq H$, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G)$ και $\forall i = 1, 2, \ldots, r, \phi(G_i) \leq H$, αφού $\phi(H) = \phi(G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_r) = \phi(G_1) \cdot \phi(G_2) \cdot \ldots \cdot \phi(G_r)$.

Έστω ότι υπάρχουν κάποια $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ και $j, 1 \leq j \leq r$ τέτοια, ώστε $\phi(G_j) \nsubseteq H$. Τότε η τομή $\phi(G_j) \cap H$ περιέχεται γνησίως εντός τής $\phi(G_j)$ και γι' αυτό $[\phi(G_j) \cap H : 1] \lneqq [\phi(G_j) : 1] = [G_1 : 1]$. Αλλά η $\phi(G_j)$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G, επειδή η G_j είναι ορθόθετη υποομάδα τής G και έτσι η $\phi(G_j) \cap H$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής G, αφού πρόκειται για τομή ορθόθετων υποομάδων. Όμως επειδή η $\phi(G_j) \cap H$ έχει λιγότερα στοιχεία από την G_1 και η G_1 ήταν μια ορθόθετη υποομάδα τής G με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων, συμπεραίνουμε ότι $\phi(G_j) \cap H = \{e_G\}$. Τώρα όμως αμφότερες οι υποομάδες H και $\phi(G_j)$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής G με $\phi(G_j) \cap H = \{e_G\}$ και γι' αυτό το $H \cdot \phi(G_j)$ είναι ένα ευθύ εσωτερικό γινόμενο με περισσότερα από $[H : 1]$ στοιχεία, όπου μάλιστα η $\phi(G_j)$ είναι ισόμορφη τής G_1. Αυτό αντίκειται στον τρόπο επιλογής τής H ως μιας τέτοιου είδους υποομάδας με τον μέγιστο αριθμό στοιχείων. Ώστε $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G)$ και $\forall i = 1, 2, \ldots, r$, $\phi(G_i) \leq H$ και έτσι διαπιστώνουμε ότι η είναι μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G.

Αλλά η G είναι μια χαρακτηριστικώς απλή ομάδα και η H είναι μια χαρακτηριστική υποομάδα με $\{e_G\} \lneqq G_1 \leq H$. Επομένως, $H = G$, δηλαδή η G ισούται με το ευθύ εσωτερικό γινόμενο $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$, όπου $G_i \cong G_1, \forall i, 2 \leq i \leq s$.

Υπολείπεται η απόδειξη ότι η G_1 (συνεπώς και κάθε $G_i, \forall i, 2 \leq i \leq r$) είναι απλή ομάδα. Έστω ότι $N \trianglelefteq G_1$ είναι μια γνήσια ορθόθετη υποομάδα τής G_1. Ισχυριζόμαστε ότι $\forall g \in G, gN = Ng$ από όπου συμπεραίνουμε ότι η N είναι μια ορθόθετη υποομάδα της G. Πράγματι, αφού $g \in G = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_s$, έπεται ότι $g = g_1 g_2 \ldots g_r$, όπου $g_i \in G_i, \forall i, 1 \leq i \leq r$. Τώρα επειδή η N είναι υποομάδα τής G_1 και επειδή $xy = yx, \forall x \in G_i, y \in G_j$ όταν $i \neq j$, βλ. Πόρισμα 3.3.2, έπεται

$$\begin{aligned} & gN = (g_1 g_2 \ldots g_r)N = g_1(g_2 \ldots g_r N) = g_1(N g_2 \ldots g_r) = (g_1 N) g_2 \ldots g_r = \\ & (N g_1) g_2 \ldots g_r = N(g_1 g_2 \ldots g_r) = Ng, \end{aligned}$$

όπου $g_1 N = N g_1, \forall g_1 \in G_1$, επειδή $N \trianglelefteq G_1$. Ώστε, $N \trianglelefteq G$.

Αλλά τώρα η N οφείλει να ισούται με $\{e_G\}$, αφού η G_1 είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων. Επομένως η G_1 είναι απλή. □

Παρατηρήσεις 3.3.3. Κάθε πεπερασμένη και χαρακτηριστικώς απλή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους απλών ισόμορφων ομάδων.

Πόρισμα 3.3.3. *Οι κυρίαρχοι παράγοντες μια πεπερασμένης αβελιανής ομάδας $(G, \star)$ είναι στοιχειώδεις αβελιανές p–ομάδες.*

Απόδειξη. ΟΙ κυρίαρχοι παράγοντες είναι πεπερασμένες, χαρακτηριστικώς απλές και αβελιανές ομάδες και γι' αυτό είναι ισόμορφοι με ένα εξωτερικό ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους απλών ισόμορφων ομάδων, οι οποίες είναι αβελιανές. Αλλά οι απλές αβελιανές ομάδες είναι κυκλικές πρώτης τάξης. Συνεπώς, κάθε κυρίαρχος παράγοντας είναι ισόμορφος με ένα πεπερασμένο εξωτερικό ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_p \times \ldots \mathbb{Z}_p$, δηλαδή με μια στοιχειώδη αβελιανή p–ομάδα. □

3.4 Η απλότητα τής $\mathbb{A}_n$, για $n \geq 5$

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα αποδεικνύοντας ότι η $\mathbb{A}_n$ είναι απλή όταν $n \geq 5$. Υπενθυμίζουμε ότι στην Ενότητα 2.2.2 έχουμε ήδη αποδείξει ότι η εναλλάσσουσα υποομάδα

$\mathbb{A}_5$ τής συμμετρικής ομάδας S_n είναι απλή.

Αρχίζουμε με το

Λήμμα 3.4.1. *Η εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_n$ τής συμμετρικής ομάδας $(S_n, \circ), n \geq 3$ παράγεται από τους κύκλους μήκους τρία.*

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο τής $\mathbb{A}_n$ είναι μια σύνθεση άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων[2], αφού η $\mathbb{A}_n$ αποτελείται ακριβώς από τις άρτιες μετατάξεις τής S_n. Συνεπώς, η $\mathbb{A}_n$ παράγεται από τις συνθέσεις ζευγών αντιμεταθέσεων. Αρκεί να δείξουμε ότι οι συνθέσεις ζευγών αντιμεταθέσεων, είναι συνθέσεις κύκλων μήκους τρία.
Κάθε ζεύγος αντιμεταθέσεων διαθέτει ένα ή δεν διαθέτει κανένα κοινό στοιχείο[3].

Στην πρώτη περίπτωση, όπου τα $i, j, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι ανά δύο διαφορετικά, έχουμε

$$\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & s & j \end{pmatrix}$$

και στη δεύτερη περίπτωση, όπου τα $i, j, r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι ανά δύο διαφορετικά, έχουμε

$$\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & r & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i & r & s \end{pmatrix}.$$

□

Πόρισμα 3.4.1. *Αν μια ορθόθετη υποομάδα N τής $\mathbb{A}_n, n \geq 3$ περιέχει έναν κύκλο μήκους τρία, τότε συμπίπτει με την $\mathbb{A}_n$.*

Απόδειξη. Προτρέπουμε τον αναγνώστη να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό στην περίπτωση όπου $n = 3$ ή 4. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση $n \geq 5$.

Παρατηρούμε ότι δοθέντος οποιουδήποτε 3–κύκλου $\sigma = \begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix} \in S_n$, υπάρχει μια αντιμετάθεση $\tau = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \in S_n$ με $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Πράγματι, αφού $n \geq 5$ μπορούμε να επιλέξουμε από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j, k\}$ δύο στοιχεία r, s με $r \neq s$. Οι κύκλοι $\sigma = \begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \in S_n$ είναι αποσυνδετοί και ως εκ τούτου μετατίθενται. Συνεπώς, δοθέντος οποιουδήποτε 3–κύκλου σ, ο κεντρωτής του

$$C_{S_n}(\sigma) = \{\phi \in S_n \mid \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = \sigma\}$$

περιέχει πάντοτε μια αντιμετάθεση τ.
Έτσι συμπεραίνουμε ότι η υποομάδα $C_{S_n}(\sigma)\mathbb{A}_n$ τής S_n ισούται με την S_n, αφού $S_n = \tau\mathbb{A}_n \cup \mathbb{A}_n \subseteq C_{S_n}(\sigma)\mathbb{A}_n$.
Θεωρούμε επίσης τον κεντρωτή

$$C_{\mathbb{A}_n}(\sigma) = \{\psi \in \mathbb{A}_n \mid \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = \sigma\}$$

τού σ εντός τής $\mathbb{A}_n$. Προφανώς, $C_{S_n}(\sigma) \cap \mathbb{A}_n = C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)$.

Τώρα υπολογίζουμε με τη βοήθεια τής Πρότασης 1.3.1 τον δείκτη $[C_{S_n}(\sigma) : C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)]$.

$$[C_{S_n}(\sigma) : C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)] = [C_{S_n}(\sigma) : C_{S_n}(\sigma) \cap \mathbb{A}_n] = [C_{S_n}(\sigma)\mathbb{A}_n : \mathbb{A}_n] = [S_n : \mathbb{A}_n] = 2.$$

[2] αντιμεταθέσεις ονομάζονται οι κύκλοι μήκους δύο

[3] αν το ζεύγος διαθέτει δύο κοινά στοιχεία, τότε η σύνθεση των ζευγών δίνει το ταυτοτικό στοιχείο τής S_n

Επειδή
$$[S_n : C_{S_n}(\sigma)][C_{S_n}(\sigma) : C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)] = [S_n : \mathbb{A}_n][\mathbb{A}_n : C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)]$$
συμπεραίνουμε ότι
$$[S_n : C_{S_n}(\sigma)] = [\mathbb{A}_n : C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)]. \qquad (*)$$
Έστω ότι $\mathcal{O}_{S_n}(\sigma)$ (αντιστοίχως $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}(\sigma)$) είναι η τροχιά τού σ που αποτελείται από τα στοιχεία τής S_n (αντιστοίχως τής $\mathbb{A}_n$) τα οποία είναι S_n–συζυγή (αντιστοίχως $\mathbb{A}_n$–συζυγή) τού σ. Ο πρώτος δείκτης $[S_n : C_{S_n}(\sigma)]$ στην ισότητα (*) μετρά το πλήθος των στοιχείων τής $\mathcal{O}_{S_n}(\sigma)$ και ο δεύτερος $[\mathbb{A}_n : C_{\mathbb{A}_n}(\sigma)]$ μετρά το πλήθος των στοιχείων τής $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}(\sigma)$, δηλαδή το πλήθος των $\mathbb{A}_n$–συζυγών τού σ. Αφού $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}(\sigma) \subseteq \mathcal{O}_{S_n}(\sigma)$ και επειδή πρόκειται για πεπερασμένα το πλήθος σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{O}_{S_n}(\sigma) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}(\sigma)$. Η τροχιά $\mathcal{O}_{S_n}(\sigma)$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των 3–κύκλων τής S_n, αφού δύο οποιοιδήποτε 3–κύκλοι είναι S_n–συζυγείς. Συνεπώς, δύο οποιοιδήποτε 3–κύκλοι τής S_n είναι επίσης $\mathbb{A}_n$–συζυγείς, επειδή $\mathcal{O}_{S_n}(\sigma) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}(\sigma)$.
Αν λοιπόν μια ορθόθετη υποομάδα N τής $\mathbb{A}_n$ περιέχει έναν 3-κύκλο, τότε περιέχει και όλα τα στοιχεία τής $\mathbb{A}_n$–τροχιάς του. Αφού όμως όλοι οι 3–κύκλοι τής S_n είναι $\mathbb{A}_n$–συζυγείς, συμπεραίνουμε ότι η N τους περιέχει όλους, επομένως και την υποομάδα που παράγεται από αυτούς, η οποία είναι η $\mathbb{A}_n$, λόγω τού Λήμματος 3.4.1. Ώστε $\mathbb{A}_n \leq N$ και τελικώς $N = \mathbb{A}_n$. □

Θεώρημα 3.4.1. *Η εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_n$ τής συμμετρικής ομάδας $(S_n, \circ)$ είναι απλή όταν $n \geq 5$.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς $n \geq 5$.
Για $n = 5$ γνωρίζουμε, βλέπε Θεώρημα 2.2.1, ότι η $\mathbb{A}_5$ είναι απλή ομάδα.

Έστω ότι η $\mathbb{A}_m$ είναι απλή ομάδα, για κάθε $m \lneqq n$. Θα αποδείξουμε ότι η $\mathbb{A}_n$ είναι απλή ομάδα, όπου προφανώς το δοθέν n είναι ≥ 6. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι κάθε ορθόθετη υποομάδα N τής $\mathbb{A}_n$ με $N \neq \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$ ισούται με την $\mathbb{A}_n$.

Έστω $N \trianglelefteq \mathbb{A}_n$ με $N \neq \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν $\sigma \in N, \sigma \neq \mathrm{Id}_{S_n}$ και $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $\sigma(i) = i$. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι

$$\boxed{(*)\ \forall \sigma \in N, \sigma \neq \mathrm{Id}_{S_n} \text{ και } \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ έχουμε } \sigma(i) \neq i.}$$

Έστω $\sigma \in N$, $\sigma \neq \mathrm{Id}_{S_n}$. Η παράσταση τού σ είναι

$$\text{ή } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & & a & \ldots \\ a & \ldots & 1 & & \ldots \end{pmatrix} \text{ ή } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & a & \ldots \\ a & \ldots & 1 & \ldots \end{pmatrix}, \text{ όπου } a \neq 1.$$

Επειδή $n \geq 6$, μπορούμε στην ανωτέρω παράσταση τού σ να επιλέξουμε μια στήλη η οποία να μην περιέχει ούτε στην πάνω ούτε στην κάτω γραμμή τα στοιχεία 1 ή a και έτσι θα έχουμε

$$\text{ή } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & & a & \ldots & b & \ldots \\ a & \ldots & 1 & & \ldots & c & \ldots \end{pmatrix} \text{ ή } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & a & \ldots & b & \ldots \\ a & \ldots & 1 & \ldots & c & \ldots \end{pmatrix}.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να βρούμε $b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $b \neq 1, a$ και $\sigma(b) = c \neq 1, a$. Επιπλέον έχουμε $b \neq c$, λόγω τής παραδοχής (*). Τα στοιχεία $1, a, b, c$ είναι ανά δύο διαφορετικά, και απαρτίζουν ένα σύνολο τεσσάρων στοιχείων. Επειδή $n \geq 6$ μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία $d, e \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{1, a, b, c\}$ με $d \neq e$.
Θεωρούμε το στοιχείο $\rho = \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b & c & d & e \end{pmatrix} \in S_n$.
Το ρ είναι στοιχείο τής $\mathbb{A}_n$ ως γινόμενο δύο περιττών κύκλων τής S_n. Το $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$ ανήκει στην N, αφού $N \trianglelefteq \mathbb{A}_n$ και το $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} \circ \sigma$ ανήκει επίσης στην N ως γινόμενο στοιχείων τής N.
Έχουμε

$$\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} \circ \sigma(1) = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}(a) = \rho \circ \sigma(1) = \rho(a) = 1.$$

Αλλά το $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} \circ \sigma \neq \mathrm{Id}_{S_n}$, επειδή

$$\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} \circ \sigma(b) = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}(c) = \rho \circ \sigma(b) = \rho(c) = d.$$

Αυτό όμως αντίκειται στην παραδοχή (*), επομένως υπάρχει κάποιο $\sigma \in N$, $\sigma \neq \mathrm{Id}_{S_n}$ και κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $\sigma(i) = i$.
Θεωρούμε το σύνολο $A_i = \{\phi \in \mathbb{A}_n \mid \phi(i) = i\}$ που αποτελείται από τα στοιχεία τής $\mathbb{A}_n$ τα οποία διατηρούν σταθερό το συγκεκριμένο i. Το A_i είναι μια υποομάδα τής $\mathbb{A}_n$ με $N \cap A_i \neq \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$, αφού όπως αποδείξαμε υπάρχουν μη τετριμμένα στοιχεία τής N που έχουν αυτήν ακριβώς την ιδιότητα. Αλλά η A_i είναι ισόμορφη με την εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_{n-1}$ τής S_{n-1}, η οποία λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης είναι απλή ομάδα. Επομένως, η τομή $N \cap A_i = A_i$ και επειδή η A_i περιέχει 3–κύκλους, συμπεραίνουμε ότι η N περιέχει 3–κύκλους. Όμως σύμφωνα με το Πόρισμα 3.4.1, η μοναδική ορθόθετη υποομάδα τής $\mathbb{A}_n$ που περιέχει έναν 3–κύκλο είναι η ίδια η $\mathbb{A}_n$. Ώστε η μοναδική ορθόθετη υποομάδα $N \neq \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$ τής $\mathbb{A}_n$ είναι η $\mathbb{A}_n$ και γι' αυτό η $\mathbb{A}_n$ είναι απλή ομάδα. □

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης «Θεωρία Ομάδων». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1250.

Σημείωμα Αδειοδότησης