ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Θεωρία Ομάδων

Ενότητα: Επιλύσιμες Ομάδες

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 4

Επιλύσιμες Ομάδες

4.1 Προκαταρκτικές Έννοιες

4.1.1 Ορισμός και Παραδείγματα

Ορισμός 4.1.1. Μια ομάδα $(G, \star)$ ονομάζεται *επιλύσιμη* αν, διαθέτει μια ορθόθετη σειρά

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\}$$

με αβελιανούς παράγοντες.

Παραδείγματα 4.1.1. (α′) Κάθε αβελιανή ομάδα $(G, \star)$ είναι επιλύσιμη, αφού ο μοναδικός παράγοντας τής τετριμμένης ορθόθετης σειράς

$$G \geq \{e_G\}$$

είναι αβελιανός.

(β′) Η εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_4$ τής συμμετρικής ομάδας $(S_4, \circ)$ είναι επιλύσιμη, αφού η σειρά

$$\mathbb{A}_4 \geq V \geq \{\mathrm{Id}_{S_4}\},$$

όπου $V = \left\{\mathrm{Id}_{S_4}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\right\}$ είναι ορθόθετη και οι παράγοντες $\mathbb{A}_4/V$ και $V/\{\mathrm{Id}_{S_4}\}$ είναι αβελιανοί, επειδή πρόκειται για ομάδες με πλήθος στοιχείων ≤ 4.

(γ′) Η συμμετρική ομάδα $(S_5, \circ)$ δεν είναι επιλύσιμη. Πράγματι, η σειρά

$$S_5 \geq \mathbb{A}_5 \geq \{\mathrm{Id}_{S_5}\}$$

είναι μια κυρίαρχη σειρά για την S_5. Αν λοιπόν υπήρχε μια ορθόθετη σειρά με αβελιανούς παράγοντες για την S_5, τότε αυτή θα εκλεπτύνονταν σε μια κυρίαρχη σειρά, τής οποίας οι κυρίαρχοι παράγοντες θα ήταν αβελιανοί, βλ. την αμέσως επόμενη Παρατήρηση 4.1.1. Αφού όμως δύο οποιεσδήποτε κυρίαρχες σειρές είναι ισόμορφες, θα υπήρχε μεταξύ αυτών των κυρίαρχων παραγόντων και ένας κυρίαρχος παράγοντας ισόμορφος με την $\mathbb{A}_5$, η οποία όμως δεν είναι αβελιανή ομάδα.

(δ′) Η εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_n$ τής συμμετρικής ομάδας $(S_n, \circ)$ δεν είναι επιλύσιμη όταν $n \geq 5$. Πράγματι, η $\mathbb{A}_n \geq \{\mathrm{Id}_{S_n}\}$ είναι η μόνη γνήσια ορθόθετη σειρά για την $\mathbb{A}_n$, αφού η $\mathbb{A}_n$ είναι απλή όταν $n \geq 5$.

(ε′) Έστω ότι $(\mathrm{GL}_2(k), \cdot)$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με συνιστώσες από ένα σώμα k, ότι

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in k, ad \neq 0 \right\}$$

είναι η υποομάδα τής $\mathrm{GL}_2(k)$ που αποτελείται από τους άνω τριγωνικούς πίνακες και ότι

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1_k & b \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \mid b \in k \right\}$$

είναι η υποομάδα τής $\mathrm{GL}_2(k)$ που αποτελείται από τους πίνακες, οι οποίοι έχουν όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με το μοναδιαίο στοιχείο 1_k τού k.
Η σειρά

$$G \geq G_1 \geq \{I_2\},$$

όπου I_2 είναι ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας, είναι μια ορθόθετη σειρά για την G. Επιπλέον η πηλικοομάδα G/G_1 είναι αβελιανή, επειδή είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο $k^\star \times k^\star$, όπου $(k^\star = k \setminus \{0\}, \cdot)$ είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα τού σώματος k και η πηλικοομάδα $G_1/\{I_2\}$ είναι αβελιανή, επειδή είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα $(k, +)$ τού σώματος k. Επομένως, η G είναι επιλυσιμη ομάδα.

Παρατηρήσεις 4.1.1. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια επιλύσιμη ομάδα και ότι

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots G_i \geq G_{i+1} \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\} \qquad (*)$$

είναι μια ορθόθετη σειρά για την G με αβελιανούς παράγοντες. Οι παράγοντες οποιασδήποτε ορθόθετης εκλέπτυνσης τής (*) είναι επίσης αβελιανοί.

Είναι αρκετό να εξετάσουμε τους παράγοντες που προκύπτουν εκλεπτύνοντας τη σειρά μεταξύ των όρων G_i και G_{i+1}. Ας υποθέσουμε ότι μεταξύ των G_i και G_{i+1} ενθέτουμε τις ορθόθετες υποομάδες $N_j, j = 1, 2, \ldots, \ell$:

$$G_i \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_j \geq N_{j+1} \geq \cdots \geq N_\ell \geq G_{i+1}.$$

Οι παράγοντες $N_\ell/G_{i+1} \leq G_i/G_{i+1}$ και $G_i/N_1 \cong (G_i/G_{i+1})/(N_1/G_{i+1})$ είναι αβελιανοί, επειδή ο παράγοντας G_i/G_{i+1} είναι αβελιανός. Κάθε παράγοντας $N_j/N_{j+1}, j = 1, 2, \ldots, \ell - 1$ περιέχεται στην πηλικοομάδα G_i/N_{j+1}, η οποία είναι αβελιανή ως επιμορφική εικόνα τής G_i/G_{i+1}, αφού $G_i/N_{j+1} \cong (G_i/G_{i+1})/(N_{j+1}/G_{i+1})$. Ώστε ο παράγοντας N_j/N_{j+1} είναι αβελιανός $\forall j, 1 \leq j \leq \ell - 1$.

Πρόταση 4.1.1. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια επιλύσιμη ομάδα. Κάθε υποομάδα H τής G και κάθε πηλικοομάδα G/N, όπου $N \trianglelefteq G$, είναι επίσης επιλύσιμη ομάδα.*

Απόδειξη. Έστω ότι η

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_i \geq G_{i+1} \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\}$$

είναι μια ορθοθετη σειρά για τη G με αβελιανούς παράγοντες.

Αν $H \leq G$ είναι μια υποομάδα τής G, τότε θεωρούμε τη σειρά

$$\begin{aligned} &H = H \cap G = H \cap G_0 \geq H \cap G_1 \geq \cdots \geq H \cap G_i \geq H \cap G_{i+1} \geq \ldots \\ &\cdots \geq H \cap G_r = H \cap \{e_G\} = \{e_G\}. \end{aligned} \tag{**}$$

Προφανώς, $\forall i, 0 \leq i \leq r$, η $H \cap G_i$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής H.
Επιπλέον,

$$H \cap G_i / H \cap G_{i+1} = H \cap G_i / (H \cap G_i) \cap G_{i+1} \cong (H \cap G_i) G_{i+1} / G_{i+1} \leq G_i / G_{i+1}$$

και έτσι προκύπτει ότι οι παράγοντες τής (**) είναι αβελιανοί.

Αν G/N είναι μια πηλικοομάδα τής G, όπου $N \trianglelefteq G$, τότε θεωρούμε τη σειρά

$$\begin{aligned} &G/N = G_0/N \geq G_1N/N \geq \cdots \geq G_iN/N \geq G_{i+1}N/N \geq \ldots \\ &\cdots \geq G_rN/N = N/N = \{N\}. \end{aligned} \tag{***}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} &(G_iN/N)/(G_{i+1}N/N) \cong G_iN/G_{i+1}N = G_i(G_{i+1}N)/G_{i+1}N \cong G_i/G_i \cap (G_{i+1}N) \cong \\ &(G_i/G_{i+1})/(G_i \cap (G_{i+1}N)/G_{i+1}). \end{aligned}$$

(Προσέξτε ότι επιτρέπεται ο σχηματισμός τής πηλικοομάδας $(G_i \cap (G_{i+1}N)/G_{i+1})$, επειδή $G_{i+1} \leq G_i \cap (G_{i+1}N)$, αφού $G_{i+1} \leq G_i$.)
Ώστε $\forall i, 0 \leq i \leq r-1$, ο παράγοντας $(G_iN/N)/(G_{i+1}N/N)$ είναι ισόμορφος με μια επιμορφική εικόνα τής αβελιανής ομάδας G_i/G_{i+1} και γι' αυτό είναι επίσης αβελιανός. Επομένως, η (***) είναι μια ορθόθετη σειρά με αβελιανούς παράγοντες για την πηλικοομάδα G/N. Συνεπώς, η G/N είναι μια επιλύσιμη ομάδα. □

Πόρισμα 4.1.1. *Η συμμετρική ομάδα $(S_n, \circ)$ δεν είναι επιλύσιμη όταν $n \geq 5$.*

Απόδειξη. Αν ήταν η S_n επιλύσιμη, τότε θα ήταν και η $\mathbb{A}_n$ επιλύσιμη. Αλλά όπως είδαμε αυτό είναι αδύνατο, αφού η $\mathbb{A}_n$ είναι απλή όταν $n \geq 5$. □

Πρόταση 4.1.2. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα.*

(α$'$) *Αν η G είναι απλή ομάδα, τότε είναι μια κυκλική ομάδα πρώτης τάξης.*

(β$'$) *Οποιοσδήποτε συνθετικός παράγοντας τής G είναι μια κυκλική ομάδα πρώτης τάξης.*

(γ$'$) *Οποιοσδήποτε κυρίαρχος παράγοντας τής G είναι μια στοιχειώδης αβελιανή p–ομάδα.*

Απόδειξη. (α$'$) Κάθε επιλύσιμη ομάδα G διαθέτει μια ορθόθετη σειρα με αβελιανούς παράγοντες. Αφού όμως η G είναι απλή, η μοναδική ορθόθετη σειρά για την G είναι η $G \geq \{e_G\}$ και ο παράγοντας $G/\{e_G\} \cong G$ οφείλει να είναι αβελιανός. Συνεπώς, η G είναι μια απλή αβελιανή ομάδα και από την Πρόταση 2.2.11 γνωρίζουμε ότι οι απλές κυκλικές ομάδες είναι κυκλικές πρώτης τάξης.
(β$'$) και (γ$'$) Οποιαδήποτε ορθόθετη σειρά με αβελιανούς παράγοντες για την G μπορεί να εκλεπτυνθεί σε μια συνθετική (αντιστοίχως κυρίαρχη) σειρά για την G. Με τρόπο ανάλογο τής Παρατήρησης 4.1.1 διαπιστώνουμε ότι οι συνθετικοί (αντιστοίχως κυρίαρχοι) παράγοντες είναι αβελιανοί. Συνεπώς, οι συνθετικοί (κυρίαρχοι) παράγοντες είναι απλές (αντιστοίχως χαρακτηριστικώς απλές) αβελιανές ομάδες που όπως γνωρίζουμε, βλ. Πρόταση 2.2.11 (αντιστοίχως βλ. Πόρισμα 3.3.3), είναι κυκλικές ομάδες πρώτης τάξης (αντιστοίχως στοιχειώδεις αβελιανές p–ομάδες).

□

4.2 Μεταθέτες και παράγωγες Ομάδες

Ορισμός 4.2.1. Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Το στοιχείο $xyx^{-1}y^{-1}$, όπου $x, y \in G$ ονομάζεται ο *μεταθέτης* των x, y και συμβολίζεται με $[x, y]$.

Ορισμός 4.2.2. Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Ονομάζουμε *μεταθέτρια* ή *παράγωγη υποομάδα* τής G, την υποομάδα τής G που παράγεται από το σύνολο των μεταθετών τής G.

Με άλλα λόγια η μεταθέτρια (παράγωγη) υποομάδα μιας ομάδας $(G, \star)$ είναι η

$$G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

Συνηθίζεται να συμβολίζουμε τη μεταθέτρια (παράγωγη) υποομάδα τής G με G' ή με $[G, G]$. Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα αποδεικνύουμε μια ιδιαιτέρως χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα και G' η παράγωγη υποομάδα της. Τότε*

(α′) *Η G' είναι μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G.*

(β′) *Η G' είναι η μικρότερη ορθόθετη υποομάδα τής G που έχει την ιδιότητα, η πηλικοομάδα G/G' να είναι αβελιανή.*
(Δηλαδή, αν N είναι ορθόθετη υποομάδα τής G με την ιδιότητα, η πηλικοομάδα G/N να είναι αβελιανή, τότε $G' \leq N$).

Απόδειξη. (α′) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.2.1, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αυτομορφισμό $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, είναι $\phi(G') \leq G'$. Αλλά η εικόνα $\phi([x, y])$ οποιουδήποτε μεταθέτη $[x, y]$ είναι και πάλι ένας μεταθέτης, αφού $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$. Επομένως, $\phi(G') \leq G'$.
(β′) Η πηλικοομάδα G/G' είναι αβελιανή, αφού

$$\forall x, y \in G, [x^{-1}, y^{-1}] \in G' \Rightarrow xyG = yxG.$$

Αν N είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G τέτοια, ώστε η G/N να είναι αβελιανή, τότε $\forall x, y \in G, xyN = yxN \Leftrightarrow \forall x, y \in G, [x^{-1}, y^{-1}] \in N$. Επομένως, κάθε γεννήτορας τής G' ανήκει στην N και γι' αυτό $G' \leq N$. □

Παρατηρήσεις 4.2.1. Μια ομάδα $(G, \star)$ είναι αβελιανή αν, και μόνο αν, η παράγωγη υποομάδα της G' ισούται με την τετριμμένη υποομάδα $\{e_G\}$. Πράγματι, η G είναι αβελιανή αν, και μόνο αν, η πηλικοομάδα $G/\{e_G\}$ είναι αβελιανή αν, και μόνο αν, $G' = \{e_G\}$.

Παραδείγματα 4.2.1. (α′) Η συμμετρική ομάδα $(S_3, \circ)$ δεν είναι αβελιανή. Επομένως, η παράγωγη υποομάδα $[S_3, S_3] = S_3'$ δεν ισούται με την $\{\mathrm{Id}_{S_3}\}$. Η S_3' είναι υποομάδα τής $\mathbb{A}_3$, αφού κάθε γεννήτοράς της, δηλαδή κάθε μεταθέτης $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$, $\sigma, \tau \in S_3$ είναι άρτια μετάταξη τής S_3. Αφού οι μοναδικές υποομάδες τής $\mathbb{A}_3$ είναι οι $\mathbb{A}_3$ και $\{\mathrm{Id}_{S_3}\}$, συμπεραίνουμε ότι $[S_3, S_3] = S_3' = \mathbb{A}_3$.

(β′) Η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathbb{A}_4$ δεν είναι αβελιανή, επομένως $[\mathbb{A}_4, \mathbb{A}_4] = \mathbb{A}_4' \neq \{e_{\mathbb{A}_4}\}$. Η υποομάδα $V = \left\{\mathrm{Id}_{S_4}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\right\}$ τής $\mathbb{A}_4$ είναι ορθόθετη και η πηλικοομάδα $\mathbb{A}_4/V$ είναι αβελιανή. Επομένως, $\mathbb{A}_4' \leq V$. Αλλά η μοναδική ορθόθετη και $\neq \{e_{\mathbb{A}_4}\}$ υποομάδα τής $\mathbb{A}_4$ που περιέχεται στη V είναι η V. Συνεπώς, $[\mathbb{A}_4, \mathbb{A}_4] = \mathbb{A}_4' = V$.

(γ′) Θεωρούμε τη διεδρική ομάδα $D_4 = \langle \rho, s : \rho^4 = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id}, \rho s = s\rho^{-1}\rangle$. Η D_4 δεν είναι αβελιανή και γι' αυτό $[D_4, D_4] = D_4' \neq \{\mathrm{Id}\}$. Το κέντρο $Z(D_4)$ είναι ίσο με την κυκλική υποομάδα $\langle \rho^2 \rangle$ και η πηλικοομάδα $D_4/Z(D_4)$ είναι αβελιανή, επειδή $[D_4 : Z(D_4)] = 4$. Οι μοναδικές υποομάδες τής $Z(D_4)$ είναι οι $Z(D_4)$ και $\{\mathrm{Id}\}$. Αφού $\{\mathrm{Id}\} \lneqq D_4' \leq Z(D_4)$, συμπεραίνουμε ότι $[D_4, D_4] = D_4' = Z(D_4)$.

(δ′) Θεωρούμε την εναλλάσσουσα υποομάδα $\mathbb{A}_5$ τής συμμετρικής ομάδας $(S_5, \circ)$. Η $\mathbb{A}_5$ δεν είναι αβελιανή, επομένως $\mathbb{A}_5' \neq \{e_{\mathbb{A}_5}\}$. Επειδή η $\mathbb{A}_5$ είναι απλή ομάδα και επειδή η παράγωγη υποομάδα της $\mathbb{A}_5'$ είναι ορθόθετη, η μοναδική επιλογή για την $\mathbb{A}_5'$ είναι η $\mathbb{A}_5' = \mathbb{A}_5$.

Η παράγωγη Σειρά μιας Ομάδας

Ορισμός 4.2.3. Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Ορίζουμε επαγωγικά τις *ανώτερες παράγωγες υποομάδες* τής G, όπου $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ως $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = [G, G] = G'$ και $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] = (G^{(i)})'$.

Δηλαδή, η $G^{(i+1)}$ είναι η παράγωγη υποομάδα τής $G^{(i)}$.

Ορισμός 4.2.4. Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Η σειρά

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \ldots$$

ονομάζεται η *παράγωγη σειρά* για την ομάδα G.

Παραδείγματα 4.2.2. Από τα Παραδείγματα 4.2.1 έχουμε ότι

(α′) Η παράγωγη σειρά για τη συμμετρική ομάδα $(S_3, \circ)$ είναι η

$$S_3 = S_3^{(0)} > S_3^{(1)} = \mathbb{A}_3 > S_3^{(2)} = \mathbb{A}_3' = \{\mathrm{Id}_{S_3}\}.$$

(β′) Η παράγωγη σειρά για την εναλλάσσουσα ομάδα $(\mathbb{A}_4, \circ)$ είναι η

$$\mathbb{A}_4 = \mathbb{A}_4^{(0)} > \mathbb{A}_4^{(1)} = V > \mathbb{A}_4^{(2)} = V' = \{e_{\mathbb{A}_4}\}.$$

(γ′) Η παράγωγη σειρά για τη διεδρική ομάδα $(D_4, \circ)$ είναι η

$$D_4 = D_4^{(0)} > D_4^{(1)} = Z(D_4) > D_4^{(2)} = Z(D_4)' = \{\mathrm{Id}\}.$$

(δ′) Η παράγωγη σειρά για την εναλλάσσουσα ομάδα $(\mathbb{A}_5, \circ)$ είναι η

$$\mathbb{A}_5 = \mathbb{A}_5 = \cdots = \mathbb{A}_5 = \cdots = \mathbb{A}_5 = \cdots,$$

αφού $\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{A}_5^{(i)} = \mathbb{A}_5$.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, η παράγωγη υποομάδα της $G^{(n)}$ είναι οροθόθετη.*

Απόδειξη. Θα εκτελέσουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Για $n = 0$ ο ισχυρισμός είναι αληθής, αφού $G^{(0)} = G$. Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = r$, δηλαδή ότι $G^{(r)} \trianglelefteq G$. Για $n = r + 1$ γνωρίζουμε, βλ. Πρόταση 4.2.1, ότι η $G^{(r+1)}$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής $G^{(r)}$ και αφού $G^{(r)} \trianglelefteq G$, έπεται, βλ. Παρατήρηση 2.2.2, ότι $G^{(r+1)} \trianglelefteq G$. Επομένως, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, G^{(n)} \trianglelefteq G$. □

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α′) *Η G είναι μια επιλύσιμη ομάδα.*

(β′) *Υπάρχει μια υποορθόθετη σειρά για τη G με όλους τους παράγοντές της αβελιανούς.*

(γ′) *Υπάρχει $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με την παράγωγη υποομάδα $G^{(r)}$ ίση με $\{e_G\}$.*

Απόδειξη. (α′) ⇒ (β′). Προφανές, αφού κάθε ορθόθετη σειρά για την G είναι επίσης υποορθόθετη σειρά για την G.
(β′) ⇒ (γ′). Θα δείξουμε ότι αν,

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots G_i \geq G_{i+1} \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\} \tag{*}$$

είναι μια υποορθόθετη σειρά για την G με αβελιανούς παράγοντες, τότε $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, η παράγωγη υποομάδα $G^{(k)}$ περιέχεται στον όρο G_k τής (*). (Δεχόμαστε ότι $G_s = G_r = \{e_G\}, \forall s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, s \geq r$.) Θα εκτελέσουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Για $k = 0$, ο ισχυρισμός είναι αληθής, αφού $G^{(0)} = G$ και $G_0 = G$.
Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $k = t$, δηλαδή ότι $G^{(t)} \leq G_t$. Θα δείξουμε ότι είναι αληθής για $k = t + 1$, δηλαδή ότι $G^{(t+1)} \leq G_{t+1}$.
Επειδή η πηλικοομάδα G_t/G_{t+1} είναι αβελιανή, συμπεραίνουμε, βλ. Πρόταση 4.2.1, ότι $(G_t)' = [G_t, G_t] \leq G_{t+1}$. Τώρα έχουμε:

$$G^{(t+1)} = (G^{(t)})' \leq (G_t)' \leq G_{t+1}.$$

Ώστε $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, είναι $G^{(k)} \leq G_k$.
Αφού λοιπόν $G_r = \{e_G\}$ και επειδή $G^{(r)} \leq G_r$, συμπεραίνουμε ότι $G^{(r)} = \{e_G\}$.
(γ′) ⇒ (α′). Λόγω τής υπόθεσης, η παράγωγη σειρά για την G εκφυλίζεται κατόπιν ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων, δηλαδή είναι τής μορφής

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots \geq G_r = \{e_G\}. \tag{*}$$

Λόγω τής Πρότασης 4.2.2, οι παράγωγες υποομάδες $G^{(i)}$ είναι $\forall i, 0 \leq i \leq r$ ορθόθετες υποομάδες τής G. Επιπλέον, $\forall i, 0 \leq i \leq r - 1$, οι παράγοντες $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ είναι αβελιανοί. Επομένως, η (*) είναι μια ορθόθετη σειρά με αβελιανούς παράγοντες για την G. Ώστε η G είναι επιλύσιμη ομάδα. □

Πόρισμα 4.2.1. *Μια ομάδα $(G, \star)$ είναι επιλύσιμη αν, και μόνο αν, υπάρχει για τη G μια υποορθόθετη σειρά τής οποίας όλοι οι παράγοντες είναι κυκλικές ομάδες πρώτης τάξης.*

Απόδειξη. «⇒» Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει για τη G μια υποορθόθετη σειρά με αβελιανούς παράγοντες. Η συγκεκριμένη σειρά εκλεπτύνεται σε μια συνθετική σειρά για την G. Η Πρόταση 4.1.2 μας πληροροφορεί ότι όλοι οι συνθετικοί παράγοντες

αυτής τής σειράς είναι κυκλικές ομάδες πρώτης τάξης.
«$\Leftarrow$» Η υποορθόθετη σειρά την ομάδα G έχει όλους τους παράγοντές της αβελιανούς. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα η ομάδα G είναι επιλύσιμη. □

Προσέξτε ότι χάρη στο προηγούμενο θεώρημα, η αρχική ισχυρή συνθήκη για την επιλυσιμότητα μιας ομάδας, που απαιτούσε την ύπαρξη μια ορθόθετης σειράς με αβελιανούς παράγοντες, αντικαταστάθηκε από μια ασθένεστερη αλλά ισοδύναμη συνθήκη, η οποία απιτεί την ύπαρξη μιας υποορθόθετης σειράς με αβελιανούς παράγοντες. Αυτή η ασθενέστερη συνθήκη επιτρέπει τη συμπλήρωση τής Πρότασης 4.1.1 στην εξής:

Πρόταση 4.2.3. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και ότι $N \trianglelefteq G$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα της. Αν η υποομάδα N και η πηλικοομάδα G/N είναι επιλύσιμες, τότε είναι και η G επιλύσιμη ομάδα.*

Απόδειξη. Αφού η G/N είναι επιλύσιμη, υπάρχει μια υποορθόθετη σειρά για τη G/N. Ας πούμε ότι η συγκεκριμένη υποορθόθετη σειρά είναι η:

$$G/N = \overline{G}_0 \geq \overline{G}_1 \geq \overline{G}_2 \geq \cdots \geq \overline{G}_i \geq \overline{G}_{i+1} \geq \cdots \geq \overline{G}_r = \{N\} \qquad (*)$$

Συνεπώς, $\forall i, 0 \leq i \leq r-1$ η υποομάδα $\overline{G}_{i+1}$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\overline{G}_i$ και το πηλίκο $\overline{G}_i/\overline{G}_{i+1}$ είναι αβελιανό. Για κάθε $i, 0 \leq i \leq r-1$, υπάρχει υποομάδα G_i τής G με $N \leq G_i$ και με $G_i/N = \overline{G}_i$, όπου επιπλέον η G_{i+1} ορθόθετη υποομάδα τής G_i.

Γι' αυτό από την (*) επάγεται η σειρά των υποομάδων

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_i \geq G_{i+1} \geq \cdots \geq G_r = N, \qquad (**)$$

όπου $\forall i, 0 \leq i \leq r-1$ η πηλικοομάδα G_i/G_{i+1} είναι αβελιανή, αφού $G_i/G_{i+1} \cong \overline{G}_i/\overline{G}_{i+1}$. Θεωρούμε τώρα μια υποορθόθετη σειρά για την επιλύσιμη υποομάδα N, που έχει όλους τους παράγοντές της αβελιανούς:

$$N = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_j \geq N_{j+1} \geq \cdots \geq N_t = \{e_G\}. \qquad (***)$$

Συνενώνοντας τις σειρές (**) και (***) προκύπτει η σειρά

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_i \geq \cdots \geq G_r = N = N_0 \geq N_1 \geq N_j \geq \cdots \geq N_t = \{e_G\},$$

η οποία είναι μια υποορθόθετη σειρά για την G με όλους τους παράγοντές της αβελιανούς. □

Παραδείγματα 4.2.3. Η συμμετρική ομάδα $(S_3, \circ)$ (αντιστοίχως $(S_4, \circ)$) είναι επιλύσιμη ομάδα, διότι η ορθόθετη υποομάδα της $\mathbb{A}_3$ (αντιστοίχως $\mathbb{A}_4$) είναι επιλύσιμη και η πηλικοομάδα $S_3/\mathbb{A}_3$ (αντιστοίχως $S_4/\mathbb{A}_4$) είναι επίσης επιλύσιμη, αφού έχει μόνο δύο στοιχεία και ως εκ τούτου είναι αβελιανή και συνεπώς επιλύσιμη.

4.3 Μηδενοδύναμες Ομάδες

Τα ανώτερα κέντρα μιας ομάδας

Για οποιαδήποτε ομάδα $(G, \star)$ θα συμβολίζουμε με $Z(G)$ το κέντρο της. Θέτουμε $Z_1(G) = Z(G)$. Θεωρούμε την πηλικοομάδα $G/Z_1(G)$, την κανονική προβολή $p_1 : G \to G/Z_1(G)$ και ορίζουμε την υποομάδα $Z_2(G)$ τής G ως την αντίστροφη εικόνα ως προς p_1, τού κέντρου τής $G/Z_1(G)$, δηλαδή $Z_2(G) = p_1^{-1}(Z(G/Z_1(G)))$. Συνεπώς, $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G))$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε επαγωγικώς την υποομάδα $Z_{i+1}(G)$ τής G ως την αντίστροφη εικόνα, ως προς την κανονική προβολή $p_i : G \to G/Z_i(G)$, τού κέντρου τής $G/Z_i(G)$, δηλαδή $Z_{i+1}(G) = p_i^{-1}(Z(G/Z_i(G)))$. Συνεπώς, $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$. Τέλος θέτουμε $Z_0(G) = \{e_G\}$.

Ορισμός 4.3.1. Η σειρά

$$\{e_G\} = Z_0(G) \leq Z(G) = Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots \leq Z_i(G) \leq \ldots$$

ονομάζεται η *άνω κεντρική σειρά* για την ομάδα $(G, \star)$ και οι όροι τής σειράς ονομάζονται τα *ανώτερα κέντρα* τής G.

Παρατηρήσεις 4.3.1. Για κάθε $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ οι υποομάδες $Z_i(G)$ είναι χαρακτηριστικές (επομένως και ορθόθετες) υποομάδες τής G.
Για $i = 0$ αυτό είναι τετριμμένο. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $\forall i, i \in \mathbb{N}$ ο ισχυρισμός είναι αληθής.
Για $i = 1$, η $Z_1(G)$ είναι το κέντρο τής G, το οποίο είναι γνωστό ότι είναι μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G. Έστω ότι η $Z_k(G)$ είναι μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G. Θα δείξουμε ότι η $Z_{k+1}(G)$ είναι επίσης μια χαρακτηριστική υποομάδα τής G, αποδεικνύοντας ότι αν $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, τότε $\phi(Z_{k+1}(G)) \leq Z_{k+1}(G)$.
Παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο $x \in G$ ανήκει στην $Z_{k+1}(G)$ αν, και μόνο αν, $\forall g \in G$ είναι $xgZ_k(G) = gxZ_k(G)$ ή ισοδύναμα $\forall g \in G$ είναι $x^{-1}g^{-1}xg \in Z_k(G)$. Θα δείξουμε ότι, αν $x \in Z_{k+1}(G)$, τότε $\phi(x) \in Z_{k+1}(G)$.
Επειδή ο ϕ είναι ένας αυτομορφισμός, κάθε $g \in G$ ισούται με κάποιο $\phi(h), h \in G$. Έτσι έχουμε:

$$\phi(x) \in Z_{k+1}(G) \Leftrightarrow \forall \phi(h) \in G, \phi(x^{-1})\phi(h)^{-1}\phi(x)\phi(h) = \phi(x^{-1}h^{-1}xh) \in Z_k(G).$$

Αλλά αφού το $x \in Z_{k+1}(G)$, έπεται ότι $\forall h \in G$, το $x^{-1}h^{-1}xh$ ανήκει στην $Z_k(G)$. Επομένως, το $\phi(x^{-1}h^{-1}xh)$ ανήκει στην $\phi(Z_k(G))$, η οποία ισούται με την $Z_k(G)$, αφού λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης είναι χαρακτηριστική. Ώστε, αν $x \in Z_{k+1}(G)$, τότε και $\phi(x) \in Z_{k+1}(G)$. Επομένως, $\phi(Z_{k+1}(G)) \leq Z_{k+1}(G)$.

Παραδείγματα 4.3.1. (α′) Θεωρούμε τη συμμετρική ομάδα $(S_3, \circ)$. Η άνω κεντρική σειρά για την S_3 είναι η

$$\{\mathrm{Id}_{S_3}\} = Z_0(S_3) = \{\mathrm{Id}_{S_3}\} = Z_1(S_3) = \cdots = \{\mathrm{Id}_{S_3}\} = Z_i(S_3) = \ldots$$

αφού η S_3 έχει τετριμμένο κέντρο.

(β′) Η άνω κεντρική σειρά για την $(S_4, \circ)$ είναι επίσης τετριμμένη, αφού

$$\{\mathrm{Id}_{S_4}\} = Z_0(S_4) = \{\mathrm{Id}_{S_4}\} = Z_1(S_4) = \cdots = \{\mathrm{Id}_{S_4}\} = Z_i(S_4) = \ldots$$

επειδή το κέντρο $Z(S_4)$ είναι η τετριμμένη υποομάδα $\{\mathrm{Id}_{S_4}\}$.

(γ′) Γενικά, η άνω κεντρική σειρά μιας ομάδας $(G, \star)$ με τετριμμένο κέντρο είναι η τετριμμένη σειρά

$$\{e_G\} = Z_0(G) = \{e_G\} = Z_1(G) = \cdots = \{e_G\} = Z_i(G) = \ldots$$

Με την βοήθεια τής έννοιας τής άνω κεντρικής σειράς μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα ότι

Πρόταση 4.3.1. *Κάθε p–ομάδα $(G, \star)$ είναι επιλύσιμη και κάθε κυρίαρχος παράγοντάς της είναι κυκλική ομάδα τάξης p.*

Απόδειξη. Επειδή μια p–ομάδα έχει μη τεριμμένο κέντρο και επειδή οι μη τετριμμένες πηλικοομάδες μιας p–ομάδας είναι και αυτές p–ομάδες, διαπιστώνουμε ότι η άνω κεντρική σειρά μιας p–ομάδας έχει τη μορφή

$$\{e_G\} = Z_0(G) < Z(G) = Z_1(G) < \cdots < Z_r(G) = G,$$

αφού $\forall i, 0 \leq i \leq r$, η $Z_i(G)$ είναι γνήσια υποομάδα τής $Z_{i+1}(G)$ και γι’ αυτό κατόπιν ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων κάποιος όρος τής σειράς θα γίνει ίσος με G. Τώρα όμως η άνω κεντρική σειρά είναι μια ορθόθετη σειρά για τη G με όλους τους παράγοντές της αβελιανούς. Επομένως η G είναι επιλύσιμη.

Εκλεπτύνοντας την άνω κεντρική σειρά προκύπτει μια συνθετική σειρά με όλους τους συνθετικούς της παράγοντες απλές κυκλικές ομάδες. Αλλά αυτοί οι συνθετικοί παράγοντες είναι υποομάδες πηλικοομάδων p–ομάδων, όπου ο πρώτος p είναι σταθερός, γι’ αυτό όλοι οι συνθετικοί παράγοντες είναι κυκλικές ομάδες με τάξη τον συγκεκριμένο πρώτο αριθμό p. Επιπλέον, οποιαδήποτε εκλέπτυνση τής άνω κεντρικής σειράς σε υποορθόθετη σειρά για την G είναι στην πραγματικότητα μια ορθόθετη σειρά (γιατί;) και γι’ αυτό η προηγούμενη συνθετική σειρά είναι επίσης μια κυρίαρχη σειρά. Άρα κάθε κυρίαρχος παράγοντας τής G είναι κυκλική ομάδα τάξης p. □

Ορισμός 4.3.2. Μια ομάδα $(G, \star)$ ονομάζεται *μηδενοδύναμη* αν, ο σχηματισμός τής άνω κεντρικής σειράς καταλήγει στην ομάδα G, κατόπιν ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων, δηλαδή υπάρχει κάποιος $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $Z_r(G) = G$

Παρατηρήσεις 4.3.2. Προφανώς μια μηδενοδύναμη ομάδα $(G, \star)$ είναι επιλύσιμη, αφού η άνω κεντρική σειρά της είναι μια ορθόθετη σειρά για την G με όλους τους παράγοντές της αβελιανούς.
Ωστόσο κάθε επιλύσιμη ομάδα δεν είναι μηδενοδύναμη. ΟΙ συμμετρικές ομάδες $(S_3, \circ)$ και $(S_4, \circ)$ είναι επιλύσιμες, βλ. Παράδειγμα 4.2.3, αλλά δεν είναι μηδενοδύναμες, αφού έχουν αμφότερες τετριμμένο κέντρο.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης