Φυλλάδιο Ασκήσεων 1, Θεωρία Ομάδων 14-02-2013

Α 1. Έστω ότι οι H και K είναι δύο υποομάδες μιας πεπερασμένης ομάδας $(G, \star)$ με $H \subseteq K$. Να δειχθεί ότι

$$[G : H] = [G : K][K : H].$$

Α 2. Έστω ότι οι H και K είναι δύο πεπερασμένες υποομάδες μιας ομάδας $(G, \star)$. Να δειχθεί ότι

$$| KH |= \frac{| K || H |}{| K \cap H |}.$$

Α 3. Να δοθεί παράδειγμα ομάδας $(G, *)$, η οποία να διαθέτει δύο υποομάδες H, K, τέτοιες ώστε το σύνολο KH να μην είναι υποομάδα τής G.

Α 4. Έστω ότι p είναι ένας πρώτος αριθμός και ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα τάξης $p^\alpha m$, όπου $p \nmid m$. Έστω ότι P είναι μια υποομάδα τής G με p^α στοιχεία και ότι Q είναι μια υποομάδα της G με p^β στοιχεία, όπου $0 < \beta \leq \alpha$. Αν η Q δεν είναι υποομάδα τής P, να δειχθεί ότι το σύνολο PQ δεν είναι υποομάδα τής G.

Παρατηρήσεις 0.0.1. Στις επόμενες ασκήσεις συμβολίζουμε με D_n τη διεδρική ομάδα, δηλαδή την ομάδα των στερεών κινήσεων ενός κανονικού n–γώνου. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των στοιχείων της D_n είναι το

$$D_n = \{\mathrm{Id}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, s, s\rho, s\rho^2, \ldots, s\rho^{n-1}\}, \text{ με } \rho^n = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id} \text{ και } \rho s = s\rho^{-1},$$

όπου ρ είναι η στροφή κατά γωνία $2\pi/n$ (με φορά αυτήν με την οποία κινούνται οι δείκτες ενος αναλογικού ρολογιού) γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του κανονικού n–γώνου, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας του n–γώνου και όπου s είναι ο κατοπτρισμός ως προς οποιονδήποτε (αλλά σταθερά διαλεγμένο) άξονα συμμετρίας τού n–γώνου, ο οποίος κείται στο επίπεδο τού n–γώνου.

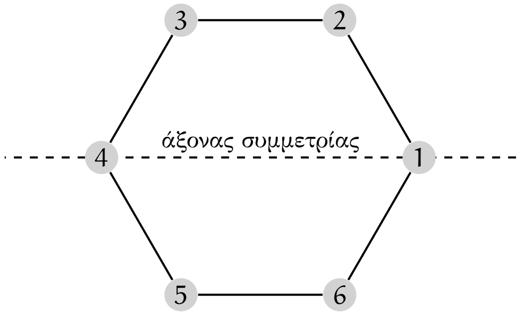
Για παράδειγμα στο ακόλουθο σχήμα, που απεικονίζει ένα κανονικό εξάγωνο, θεωρούμε τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα συμμετρίας που διέρχεται από τις κορυφές 1 και 4.

Η D_n περιγράφεται συνοπτικότερα ως

$$D_n = \langle \rho, s : \rho^n = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id}, \rho s = s\rho^{-1} \rangle.$$

Τα στοιχεία ρ, s ονομάζονται οι *γεννήτορες* τής D_n και οι ταυτότητες $\rho^n = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id}, \rho s = s\rho^{-1}$ ονομάζονται οι *σχέσεις* τής D_n.

Η ανωτέρω περιγραφή της D_n ονομάζεται μια *παράσταση* τής D_n μέσω γεννητόρων και σχέσεων.



Α 5. Να υπολογιστεί η τάξη καθενός στοιχείου των ομάδων D_3, D_4, D_5.

Α 6. Χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες και τις σχέσεις τής D_n να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x \in D_n$, το οποίο δεν είναι δύναμη τού στοιχείου ρ ισχύει $\rho x = x\rho^{-1}$

Α 7. Χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες και τις σχέσεις τής D_n να αποδειχθεί ότι, η τάξη οποιουδήποτε $x \in D_n$ ισούται με 2, όταν το x δεν είναι δύναμη τού ρ. Να συμπεράνετε ότι η D_n παράγεται από δύο στοιχεία s και $s\rho$, τα οποία είναι και τα δύο τάξης 2.

Α 8. Αν $n = 2k$ και $n \geq 4$, να δειχθεί ότι το στοιχείο $z = \rho^k$ είναι τάξης 2 και ότι μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της D_n. Να δειχθεί επίσης ότι το z είναι το μοναδικό μη ταυτοτικό στοιχείο που μετατίθεται με όλα τα στοιχεία τής D_n.

Α 9. Αν $n = 2k + 1$ και $n \geq 3$, να δειχθεί ότι το μοναδικό στοιχείο $z \in D_n$ που μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της D_n είναι το ταυτοτικό.