Φυλλάδιο Ασκήσεων 2, Θεωρία Ομάδων 20-02-2013

Α 1. Στη διεδρική ομάδα

$$D_4 = \langle \rho, s : \rho^4 = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id}, \rho s = s\rho^{-1} \rangle.$$

Θεωρούμε τα υποσύνολα $N = \{\mathrm{Id}, \rho^2, s, s\rho^2\}$ και $K = \{1, s\}$ τής D_4. Να δειχθεί

(α΄) ότι τα N και K είναι υποομάδες τής D_4,

(β΄) ότι η N είναι ορθόθετη υποομάδα τής D_4

(γ΄) ότι η K είναι ορθόθετη υποομάδα τής N και

(δ΄) ότι η K **δεν είναι** ορθόθετη υποομάδα τής D_4.

(*Συνεπώς, δεν υπάρχει μεταβατικότητα στην ιδιότητα τού ορθόθετου υποομάδων.*)

Α 2. Έστω N μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G και H μια ακόμη υποομάδα τής G. Να δειχθεί ότι η μικρότερη υποομάδα τής G που περιέχει το σύνολο $N \cup H$ ισούται με NH. Να συμπεράνετε ότι $NH = HN$.

Λύση. Κάθε υποομάδα τής G, που περιέχει το $N \cup H$, οφείλει να περιέχει και το σύνολο $NH = \{nh \mid n \in N, h \in N\}$, αφού περιέχει πάντοτε το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε στοιχείων της. Επομένως,

$$NH \subseteq \langle N \cup H \rangle,$$

όπου $\langle N \cup H \rangle$ η υποομάδα τής G που παράγεται από το $N \cup H$.

Το σύνολο NH είναι μια υποομάδα τής G, αφού

(α΄) $NH \neq \emptyset$, (επειδή $e_G \in N, e_G \in H \Rightarrow e_G e_G \in NH$).

(β΄) $a = n_1 h_1, b = n_2 h_2, h_1, h_2 \in H, n_1, n_1 \in N \Rightarrow ab^{-1} \in NH$, διότι

$$\begin{aligned}
&ab^{-1} = n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1} = (n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1})(h_2 h_2^{-1}) = \\
&n_1 h_1 \underbrace{(h_2^{-1} n_2^{-1} h_2)}_{=n' \in N} h_2^{-1} = n_1 h_1 n' h_2^{-1} = \\
&n_1 h_1 n' (h_1^{-1} h_1) h_2^{-1} = n_1 \underbrace{(h_1 n' h_1^{-1})}_{=n'' \in N} h_1 h_2^{-1} = \\
&n_1 n'' h_1 h_2^{-1} \in NH,
\end{aligned}$$

όπου τα n' και $n'' \in N$, αφού η N είναι ορθόθετη.

Γι' αυτό $\langle N \cup H \rangle = NH$.

Τέλος, επειδή $N \cup H = H \cup N$ και αποδεικνύοντας με τρόπο ανάλογο τού προηγούμενου ότι $\langle H \cup N \rangle = HN$ έχουμε

$$NH = \langle N \cup H \rangle = \langle H \cup N \rangle = HN.$$

Α 3. Έστω G μια ομάδα και $\mathrm{Aut}(G)$ το σύνολο των αυτομορφισμών τής G, δηλαδή $\mathrm{Aut}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ ισομορφισμός } \}$.

(α΄) Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$, όπου «$\circ$» είναι η σύνθεση των απεικονίσεων, αποτελεί μια ομάδα, τη λεγόμενη *ομάδα αυτομορφισμών* τής G.

(β΄) Να δειχθεί ότι $\forall \alpha \in G$, η απεικόνιση $\phi_\alpha : G \to G, g \mapsto \phi_\alpha(g) := \alpha g \alpha^{-1}$ ανήκει στην ομάδα $\mathrm{Aut}(G)$.
(Ένας αυτομορφισμός $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ ονομάζεται *εσωτερικός*, αν υπάρχει $a \in G$ με $\phi = \phi_\alpha$.)

(γ΄) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_\alpha \mid \alpha \in G\}$ των εσωτερικών αυτομορφισμών τής G αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathrm{Aut}(G)$.

(δ΄) Να δειχθεί ότι η πηλικοομάδα $G/Z(G)$, όπου $Z(G)$ είναι το κέντρο τής G είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\mathrm{Inn}(G)$ τής $\mathrm{Aut}(G)$.

Έστω ότι G είναι μια ομάδα, A ένα μη κενό σύνολο και $\phi : G \times A \to A$ μια δράση τής G επί τού A. Η G δρα *μεταβατικά* επί τού A, αν για δύο οποιαδήποτε στοιχεία $\alpha, \beta \in A$ υπάρχει πάντοτε κάποιο $g \in G$ με $g\phi a = \beta$. Στην περίπτωση αυτή ονομάζουμε και τη δράση ϕ *μεταβατική*.

Α 4. Να δειχθεί αν, $\phi : G \times A \to A$ είναι μια μεταβατική δράση, τότε ο πυρήνας της ισούται με $\cap_{g \in G} gG_a g^{-1}$, όπου G_a είναι ο σταθερωτής οποιουδήποτε στοιχείου $a \in A$.

Α 5. Έστω ότι $A = \{1, 2, 3\}$ και ότι $\Omega = A \times A$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγων με συνιστώσες από το A. Η συμμετρική ομάδα S_3 δρα επί τού Ω μέσω τής επαγόμενης απεικόνισης:

$$\phi : S_3 \times \Omega \to \Omega, (\sigma, (i, j)) \mapsto (\sigma(i), \sigma(j)).$$

(α΄) Να προσδιοριστεί ο πυρήνας K_ϕ τής ϕ.

(β΄) Να προσδιοριστεί η μετατακτική αναπαράσταση $X(\phi) : S_3 \to S_9$.

(γ΄) Να προσδιοριστούν οι S_3–τροχιές στις οποίες διαμερίζεται το σύνολο Ω.

(δ΄) Επιλέγοντας ένα στοιχείο $\alpha \in \Omega$ από κάθε διαφορετική τροχιά, να προσδιοριστεί ο σταθερωτής ${S_3}_\alpha$ τού στοιχείου α.

Α 6. Έστω ότι $\phi : G \times A \to A$ είναι μια μεταβατική δράση μιας ομάδας G επί ενός πεπερασμένου συνόλου A και ότι H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G. Θεωρούμε την επαγόμενη δράση $\phi : H \times A \to A$ και ας είναι $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_r$ οι H-τροχιές στις οποίες διαμερίζεται το A από τη δράση τής H.

(α΄) Να δειχθεί ότι η G μετατάσσει τις H-τροχιές $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_r$, δηλαδή ότι για κάθε $g \in G$ και $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, υπάρχει $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ με $g\phi\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$ (όπου $g\phi\mathcal{O} := \{g\phi a \mid a \in \mathcal{O}\}$).

(β′) Να δειχθεί ότι η G δρα μεταβατικώς επί τού συνόλου $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_r\}$ των H-τροχιών.

(γ′) Να συμπεράνετε ότι όλες οι H-τροχιές έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

(δ′) Να δειχθεί ότι αν, $a \in \mathcal{O}_1$, τότε $|\mathcal{O}_1| = [H : H \cap G_a]$ και ότι το πλήθος r των H-τροχιών ισούται με $[G : HG_a]$.

Α 7. Πόσα ουσιαστικώς διαφορετικά περιδέραια αποτελούμενα από έξι χάντρες μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας ακριβώς τρεις λευκές και ακριβώς τρεις μαύρες χάντρες;

efhhfghgfhdhg