# Φυλλάδιο Ασκήσεων 3, Θεωρία Ομάδων 28-02-2013

**Α 1.** Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα και $Z(G)$ το κέντρο της. Αν $[G : Z(G)] = n$, τότε να δειχθεί ότι οποιαδήποτε κλάση συζυγίας αποτελείται από το πολύ $n$ το πλήθος στοιχεία.

**Α 2.** Να προσδιοριστεί ένας αντιπρόσωπος από κάθε κλάση συζυγίας των στοιχείων τάξης 4 στις συμμετρικές ομάδες $S_4$ και $S_8$.

**Α 3.** Μια γνήσια υποομάδα $\mathcal{M}$ μιας ομάδας $G$ ονομάζεται *μεγιστοτική* αν, από $\mathcal{M} \leq H \leq G$, όπου $H$ οποιαδήποτε υποομάδα τής $G$, έπεται ή $H = \mathcal{M}$ ή $H = G$. Να δειχθεί ότι αν, $\mathcal{M}$ είναι μια μεγιστοτική υποομάδα τής $G$, τότε ή $N_G(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ ή $N_G(\mathcal{M}) = G$. Να συμπεράνετε ότι αν, $\mathcal{M}$ είναι μια μεγιστοτική υποομάδα τής $G$, η οποία δεν είναι ορθόθετη υποομάδα τής $G$, τότε το πλήθος των μη ταυτοτικών στοιχείων τής $G$ που περιέχονται στις υποομάδες τής $G$, οι οποίες είναι συζυγείς τής $\mathcal{M}$, είναι το πολύ $(|\mathcal{M}| - 1)[G : \mathcal{M}]$.
*Υπενθυμίζουμε ότι αν, $A \subseteq G$ είναι ένα υποσύνολο τής $G$, τότε ο **κανονικοποιητής** $N_G(A)$ τού $A$ ορίζεται ως το σύνολο $\{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}$. Το $N_G(A)$ είναι πάντοτε μια υποομάδα τής $G$.* (Γιατί;)

**Α 4.** Έστω $c$ ένας κύκλος μήκους $n$ τής συμμετρικής ομάδας $S_n$. Να δειχθεί ότι ο *κεντροποιητής* $C_{S_n}(c) = \{\sigma \in S_n \mid c \circ \sigma = \sigma \circ c\}$ τού στοιχείου $c$ ισούται με την κυκλική υποομάδα $\langle c \rangle$.

***Λύση.*** Το πλήθος των κύκλων μήκους $n$ στην $S_n$ ισούται με

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n} = (n-1)!$$

Θεωρούμε τη δράση τής $S_n$ επί τού εαυτού της μέσω συζυγίας:

$$S_n \times S_n \to S_n, (\sigma, \alpha) \mapsto \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}.$$

Αν $c$ είναι οποιοσδήποτε κύκλος μήκους $n$, τότε η κλάση συζυγίας του $\mathcal{O}(c)$ αποτελείται από όλους τους κύκλους μήκους $n$, αφού γνωρίζουμε ότι αν $c_1, c_2$ είναι δύο κυκλοι $n$, τότε υπάρχει $\sigma \in S_n$ με $\sigma \circ c_1 \circ \sigma^{-1} = c_2$. Γι' αυτό το πλήθος $|\mathcal{O}(c)|$ των στοιχείων τής $\mathcal{O}(c)$ ισούται με $(n-1)!$.
Γνωρίζουμε επίσης ότι $|\mathcal{O}(c)| = [S_n : C_{S_n}(c)]$, όπου $C_{S_n}(c)$ είναι ο σταθερωτής τού $c$, δηλαδή η υποομάδα

$$C_{S_n}(c) = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = c\} = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ c = c \circ \sigma^{-1}\}.$$

(Δηλαδή εδώ ο σταθερωτής συμπίπτει με τον κεντροποιητή.)

Επομένως, $[S_n : C_{S_n}(c)] = (n-1)! \Rightarrow [C_{S_n}(c) : 1] = n$. Επειδή όμως, $\langle c \rangle \leq C_{S_n}(c)$ και $[\langle c \rangle : 1] = n$, έπεται $C_{S_n}(c) = \langle c \rangle$.

**Α 5.** Έστω $F$ ένα σώμα και $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων στις $n$ μεταβλητές υπεράνω τού $F$. Θεωρούμε τη συμμετρική ομάδα $S_n$ και την απεικόνιση

$$\begin{aligned} &\phi : S_n \times F[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to F[x_1, x_2, \ldots, x_n], \\ &(\sigma, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \mapsto \sigma\phi f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι

(α΄) η $S_n$ δρα μέσω τής $\phi$ επί τού $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ και

(β΄) να δειχθεί ότι το πλήθος των πολυωνύμων τής μορφής $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ είναι ένας διαιρέτης τού $n!$, όπου $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι ένα πάγιο[1] πολυώνυμο τού $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

**Α 6.** Έστω $(G, \star)$ μια πεπερασμένη ομάδα. Να δειχθεί ότι το πλήθος $c$ των κλάσων συζυγίας της ισούται με

$$c = \frac{1}{[G:1]} \sum_{g \in G} [C_G(g) : 1],$$

όπου $C_G(g)$ είναι ο κεντροποιητής τού στοιχείου $g \in G$.

**Α 7.** (α΄) Έστω ότι $p$ είναι ένας πρώτος αριθμός και ότι $A$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο επί τού οποίου δρα (μέσω μιας δράσης $\phi$) μια πεπερασμένη ομάδα $G$ με τάξη $[G : 1] = p^n$. Αν ο $p$ δεν είναι διαιρέτης τού πλήθος $|A|$ των στοιχείων τού $A$, τότε να δειχθεί ότι υπάρχει κάποιο $a \in A$ με $g\phi a = a, \forall g \in G$.

(β΄) Έστω ότι $V$ ένας $d$–διάστατος διανυσματικός χώρος υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_p$ και ότι $GL(d, \mathbb{Z}_p)$ είναι η ομάδα των $d \times d$ αντιστρέψιμων πινάκων με συνιστώσες από το σώμα $\mathbb{Z}_p$. Έστω $G \leq GL(d, \mathbb{Z}_p)$ μια υποομάδα με τάξη $p^n$. Να δειχθεί ότι υπάρχει διάνυσμα $v \neq 0$ τού $V$ με $Av = v, \forall A \in G$.
(Παρεπιπτόντως, ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων τής $GL(d, \mathbb{Z}_p)$;)

**Α 8.** Έστω ότι $H \trianglelefteq G$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας $G$. Να δειχθεί ότι οι $H$ και $G/H$ είναι $p$–ομάδες, αν και μόνο αν, η $G$ είναι $p$–ομάδα.

[1] σταθερά δοσμένο