Φυλ. Ασκ. 4, Θεωρία Ομάδων 07 και 13-03-2013

A 1. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα και ότι P και P' είναι δύο p–Sylow υποομάδες τής G. Αν οι P, P' περιέχονται σε μια υποομάδα K τής G, τότε να δειχθεί ότι είναι συζυγείς εντός τής K.

A 2. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξης $200, 204, 260, 2540, 9075$.

A 3. Παρατηρώντας ότι το πλήθος των κύκλων μήκους $\ell \leq n$ τής συμμετρικής ομάδας S_n, ισούται με $n(n-1)\ldots(n-(\ell-1))/\ell$ να αποδείξετε ότι

(α′) το πλήθος των p–Sylow υποομάδων τής S_p, όπου ο p είναι ένας πρώτος αριθμός, ισούται με $(p-2)!$ και κατόπιν να συμπεράνετε ότι

(β′) ο p διαιρεί τον αριθμό $(p-1)!+1$.

Λύση. (α′) Το πλήθος των κύκλων μήκους p ισούται με $(p-1)!$. Κάθε κύκλος μήκους p χορηγεί μια κυκλική υποομάδα τάξης p και αντίστροφα κάθε κυκλική υποομάδα τάξης p έχει ως γεννήτορα έναν κύκλο μήκους p. Επιπλέον, η τομή δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών υποομάδων τάξης p είναι μόνο το ταυτοτικό στοιχείο, αφού ο p είναι ένας πρώτος αριθμός. Αν είναι k το πλήθος των διαφορετικών κυκλικών υποομάδων τάξης p, τότε η S_p διαθέτει $k(p-1)$ στοιχεία τάξης p. Έτσι έχουμε $k(p-1) = (p-1)! \Rightarrow k = (p-2)!$.

(β′) Αφού $[S_p : 1] = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot p$, συμπεραίνουμε ότι οι p–Sylow υποομάδες συμπίπτουν με τις κυκλικές υποομάδες τάξης p και γι' αυτό, λόγω τής Θεωρίας Sylow, γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους n_p ικανοποιεί την $n_p \equiv 1 \bmod p$. Αλλά, $n_p = (p-2)!$. Επομένως,

$$(p-2)! \equiv 1 \bmod p \Leftrightarrow (p-2)! = 1 + \lambda p, \text{ με } \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ και } p \text{ πρώτο } \Leftrightarrow (p-1)! = (p-1) + \lambda p(p-1) \Leftrightarrow p \mid (p-1)! + 1.$$

A 4. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα, η οποία διαθέτει ακριβώς μια p–Sylow υποομάδα τάξης p^α. Να δειχθεί ότι ότι το πλήθος των στοιχείων τής G, που η τάξη τους είναι ένας διαιρέτης τού p^α, ισούται με p^α.

A 5. Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα και $\mathrm{Syl}_p(G)$ το σύνολο των p–Sylow υποομάδων της. Να δειχθεί ότι η υποομάδα τής G, που παράγεται από το σύνολο $\cup_{P \in \mathrm{Syl}_p(G)} P$, είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G.

A 6. Να δειχθεί ότι μια ομάδα $(G, \star)$ με $[G : 1] = 105$ διαθέτει πάντοτε είτε μια ορθόθετη υποομάδα τάξης 5 είτε μια ορθόθετη υποομάδα τάξης 7. Κατόπιν να συμπεράνετε ότι η G διαθέτει μια ορθόθετη υποομάδα N με δείκτη $[G : N] = 3$.

Α 7. Έστω ότι n είναι ένας φυσικός αριθμός και ότι p είναι ένας πρώτος διαιρέτης του. Εάν ο αριθμός 1 είναι ο μοναδικός διαιρέτης τού n που ισούται με $1 \equiv \mathrm{mod} p$, τότε να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ομάδα τάξης n, η οποία να είναι απλή.

(Η ανωτέρω άσκηση μας πληροφορεί ότι οι πιθανές τάξεις για μια απλή ομάδα που έχει το πολύ 200 στοιχεία, είναι οι 12, 24, 30, 36, 48, 56, 60, 72, 80, 90, 96, 105, 108, 112, 120, 132, 144, 150, 160, 168, 180 και 192.)