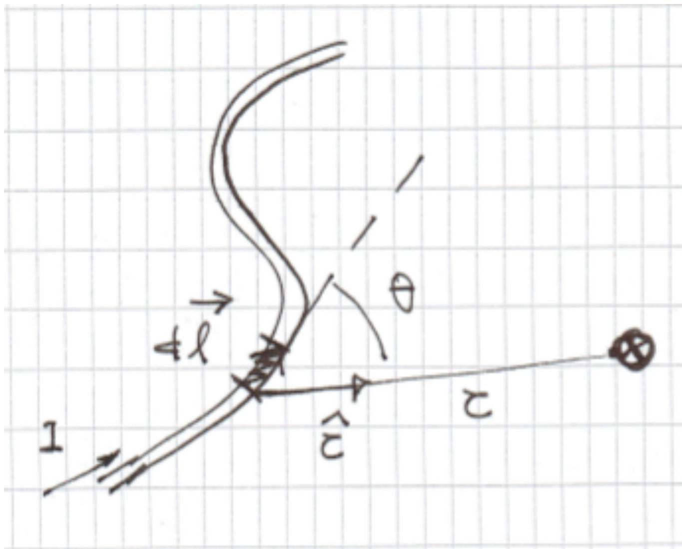
9. Ο νόμος των Biot-Savart



Οι Biot και Savart βρήκαν πειραματικά ότι ένα στοιχειώδες τμήμα $d\ell$ ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I, δημιουργεί σε απόσταση r μία στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή dB, η οποία έχει

- Μέτρο ανάλογο του $d\ell$, της έντασης I του ρεύματος, του ημιτόνου της γωνίας θ μεταξύ των διανυσμάτων $d\vec{\ell}$ και $\vec{r}$, και αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης r. Δηλαδή,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\ell \sin\theta}{r^2}$$

- Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $d\vec{\ell}$ και $\vec{r}$,
- Φορά που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

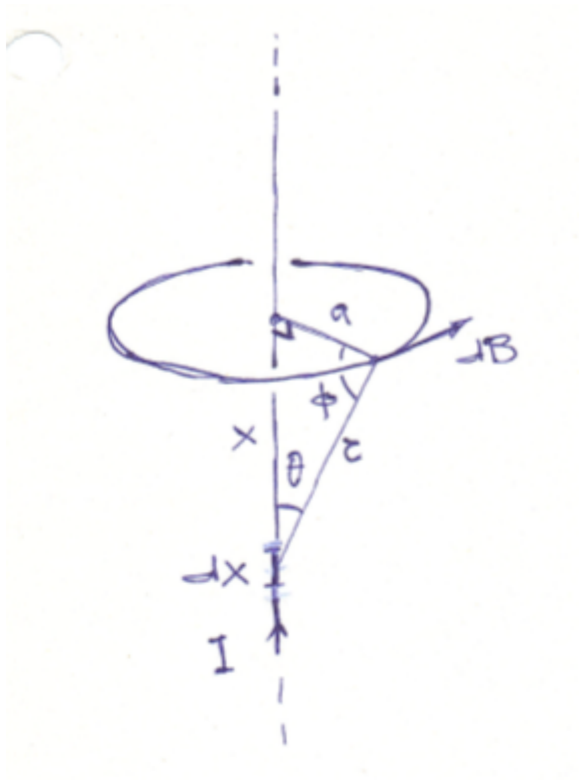
Σε διανυσματική μορφή, ο νόμος Biot-Savart γράφεται

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Η σταθερά μ_0 ονομάζεται μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Ισχύει ότι $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{Wb}{A\cdot m}$.

Παράδειγμα 1

Η μαγνητική επαγωγή σε απόσταση a από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.



Χωρίζουμε τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dx. Κάθε τέτοιο τμήμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και δημιουργεί μία στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή dB σε απόσταση a από τον αγωγό.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I dx \sin\theta}{r^2}$$

Από το τρίγωνο του Σχήματος έχουμε

$$x = a\tan\varphi \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{a}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \cos\varphi$$

$$r\cos\varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\cos\varphi}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{\cos^2\varphi}\,d\varphi\cos\varphi\,\frac{\cos^2\varphi}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\cos\varphi\,d\varphi$$

Η μαγνητική επαγωγή βρίσκεται με ολοκλήρωση

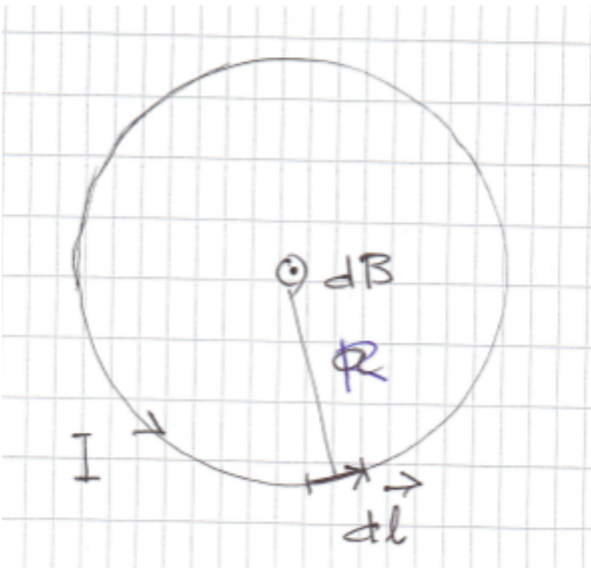
$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}2$$

Άρα,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}$$

Παράδειγμα 2

Η μαγνητική επαγωγή στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας R, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.



Χωρίζουμε τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dx. Κάθε τέτοιο τμήμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και δημιουργεί μία στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή dB στο κέντρο του κυκλικού αγωγού.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx\sin 90°}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx}{R^2}$$

Με ολοκλήρωση βρίσκουμε

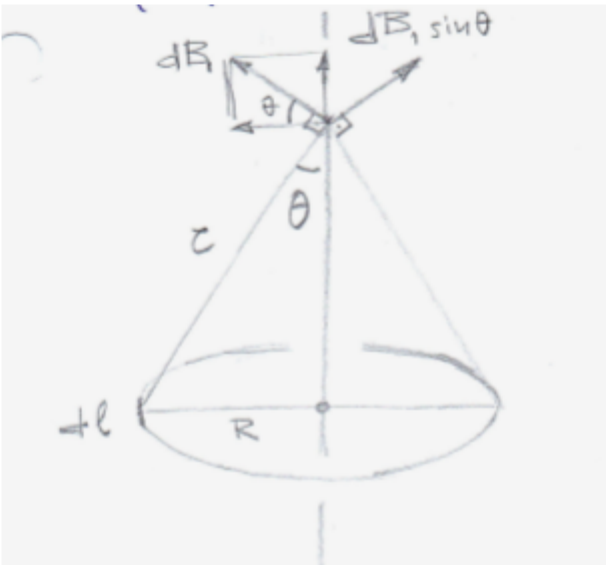
$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_0^{2\pi R} dx = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R$$

Επομένως,

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\frac{I}{R}$$

Παράδειγμα 3

Η μαγνητική επαγωγή σε σημείο του άξονα ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.



Κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\ell$ του βρόχου δημιουργεί μία στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή dB_1 στον άξονα του βρόχου, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Έχουμε

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\ell \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\ell}{r^2}$$

Η dB_1 αναλύεται στην $dB_1 \sin\theta$ κατά μήκος του άξονα και την κάθετη συνιστώσα $dB_1 \cos\theta$. Η κάθετη συνιστώσα αναιρείται από την αντίστοιχη συνιστώσα του συμμετρικού τμήματος του $d\ell$ ως προς το κέντρο του βρόχου. Άρα, η συνιστώσα που συνεισφέρει στην συνολική ένταση είναι η

$$dB = dB_1 \sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\sin\theta\, d\ell$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\sin\theta\int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\sin\theta\, 2\pi R = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 IR}{r^2}\sin\theta$$

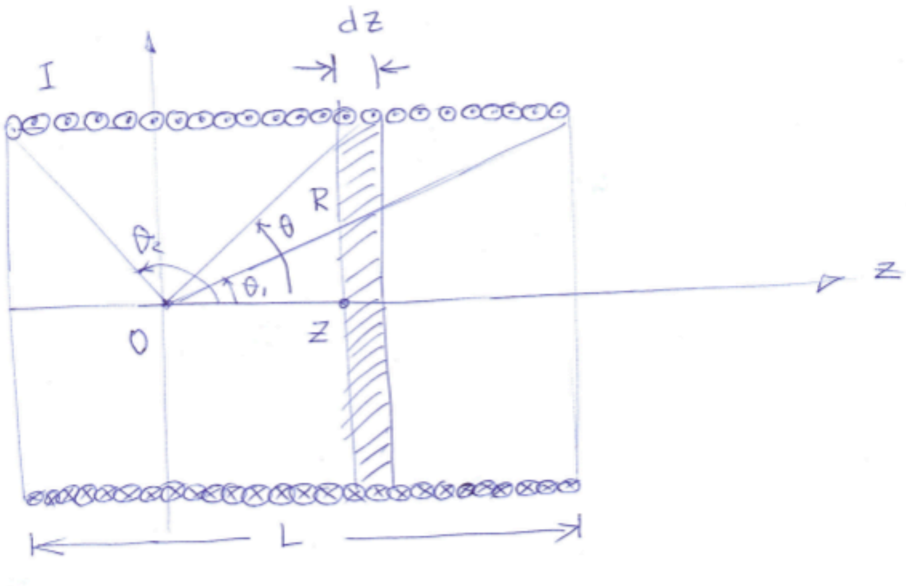
Όμως, $R = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sin\theta}$.

Άρα,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta$$

Παράδειγμα 4

Η μαγνητική επαγωγή σε σημείο του άξονα ενός πηνίου μήκους L με N σπείρες, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.



Ορίζουμε την επιδερμική πυκνότητα ρεύματος

$$J = \frac{NI}{L} \quad (\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha\ \alpha\nu\alpha\ \mu o\nu\grave{\alpha}\delta\alpha\ \mu\grave{\eta}\kappa o\upsilon\varsigma)$$

Χωρίζουμε το πηνίο σε «φέτες» πάχους dz, κάθε μία από τις οποίες διαρρέεται από ρεύμα

$$dI = J dz = \frac{NI}{L} dz$$

Η κάθε φέτα παράγει στο σημείο O μία στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή μέτρου

$$dB = \frac{\mu_0}{2R}\sin^3\theta\, dI = \frac{\mu_0 NI}{2RL}\sin^3\theta\, dz$$

Από την γεωμετρία του Σχήματος,

$$R = z\tan\theta \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$$

Άρα,

$$dB = -\frac{\mu_0 NI}{2RL}\sin^3\theta \cdot \frac{R}{\sin^2\theta}d\theta = -\frac{\mu_0 NI}{2L}\sin\theta\, d\theta$$

Η συνολική μαγνητική επαγωγή προκύπτει με ολοκλήρωση[†]

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0 NI}{2L}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 NI}{2L}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

Άρα,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2L}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

Εάν $n^* \equiv \frac{N}{L}$ είναι ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους, ο τύπος αυτός γράφεται και

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 n^* I\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

Εάν το πηνίο έχει άπειρο μήκος (στην πράξη: $L >> R$) τότε $\theta_1 \to 0$ και $\theta_2 \to \pi$, οπότε
$B_\infty = \mu_0 n^* I$

[†] Η ολοκλήρωση γίνεται από την θ_2 προς την θ_1, ώστε η μεταβλητή θ να αυξάνει όπως το z.