

## Το κύκλωμα LC

Με τον διακόπτη στη θέση Α, ο πυκνωτής φορτίζεται και αποκτά φορτίο  $Q = CU$ . Στη συνέχεια, ο διακόπτης έρχεται στη θέση Β. Ο 2<sup>ος</sup> κανόνας του Kirchhoff δίνει

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο παίρνουμε

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \omega^2 I = 0$$

Η τελευταία Δ.Ε. είναι 2<sup>ης</sup> τάξης ως προς τον χρόνο με σταθερούς συντελεστές και έχει γενική λύση της μορφής

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

δηλαδή, εκφράζει μία αρμονική ταλάντωση του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου. Οι δύο σταθερές της ολοκλήρωσης είναι το πλάτος  $I_0$  και η κυκλική συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Οι σταθερές  $I_0$  και  $\omega$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες: την χρονική στιγμή  $t = 0$ ,  $I(0) = 0$  και  $q(0) = q_0$  (=μέγιστο).

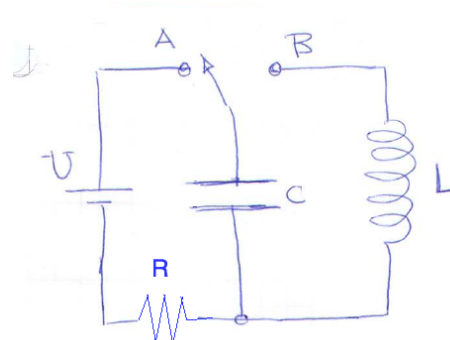
$$I(0) = 0 = I_0 \sin \phi \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t$$

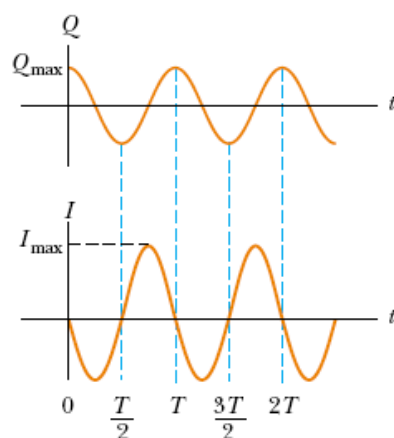
Το ηλεκτρικό φορτίο συναρτήσει του χρόνου είναι

$$q(t) = \int I(t) dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$$

$$\text{Άρα, } q(t) = q_0 \cos \omega t, \text{ όπου } q_0 = -\frac{I_0}{\omega}.$$

Η ένταση του ρεύματος και το φορτίο μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου όπως το ημίτονο και το συνημίτονο. Όταν το φορτίο γίνεται μέγιστο, το ρεύμα μηδενίζεται. Παρατηρήσατε επίσης ότι αφού  $q_0 > 0$ , έπεται ότι το  $I_0 < 0$ .





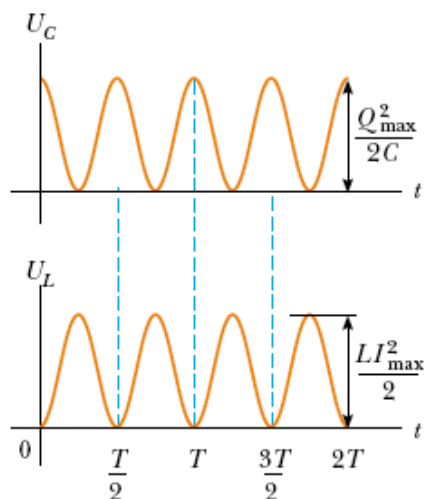
Η συνολική ενέργεια του κυκλώματος την τυχαία χρονική στιγμή  $t > 0$  είναι

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2$$

Εάν δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας λόγω θερμότητας ή ακτινοβολίας,  $U = \text{σταθερό}$ . Αφού  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  και  $q(t) = q_0 \cos \omega t$  έχουμε

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2 \omega t$$

Επομένως, οι ενέργειες  $U_C$  και  $U_L$  είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Στην γραφική παράσταση των  $U_C$  και  $U_L$  συναρτήσεων του χρόνου, το άθροισμα των δύο καμπύλων κάθε χρονική στιγμή είναι σταθερό και ίσο με την συνολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο κύκλωμα.



Το κύκλωμα LC αντιστοιχεί στο μηχανικό σύστημα μάζας  $m$  συνδεδεμένης με ελατήριο σταθεράς  $k$ , το οποίο εκτελεί ταλάντωση χωρίς τριβή ή αντίσταση του αέρα. Θυμηθείτε ότι στο μηχανικό σύστημα η συνολική ενέργεια γράφεται

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2, \text{ οπότε } x \leftrightarrow q, \quad k \leftrightarrow \frac{1}{C}, \quad v \leftrightarrow I, \quad m \leftrightarrow L.$$