ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Διακριτά Μαθηματικά Ι

Μαθηματική λογική και αποδεικτικές τεχνικές

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Σπύρος Κοντογιάννης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Άδειες Χρήσης

ΜΥΥ204
Διακριτά Μαθηματικά Ι

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
-- Τυπικές Αποδείξεις
-- Αποδεικτικές Μέθοδοι και Θεωρήματα
(Σημειώσεις & Παρ. 1.3 βιβλίου EPP)

2η Εβδομάδα

Σπύρος Κοντογιάννης – Άνοιξη 2015
Τμήμα Πληροφορικής Παν. Ιωαννίνων

Έλεγχος Ορθότητας Επιχειρημάτων

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ: Μια ακολουθία προτάσεων που καταλήγουν σε μια τελική πρόταση (το **συμπέρασμα**).

ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς εξασφαλίζεται η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος?

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Η εξασφάλιση της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος από την ερμηνεία του συμπεράσματος (αγνοώντας τη δομή του επιχειρήματος).

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Η εξασφάλιση της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος από τη δομή του ίδιου του επιχειρήματος, αγνοώντας το περιεχόμενο (τη σημασία) του συμπεράσματος και/ή των επιμέρους προτάσεων.

Σημασιολογική Προσέγγιση (Ι)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΣ:

1. **ΑΝ** ο Σωκράτης είναι άνθρωπος **ΤΟΤΕ** (ο Σωκράτης) είναι θνητός.
2. Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.

$\therefore$ Ο Σωκράτης είναι θνητός.

Μορφή Επιχειρήματος:

1. $p \rightarrow q$
2. p

$\therefore$ q

p	q	(p → q)
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ:

- Γνωρίζω ότι (πράγματι) ο Σωκράτης είναι κάποιος συγκεκριμένος άνθρωπος (άρα, με ενδιαφέρουν ΜΟΝΟ οι γραμμές του πίνακα αλήθειας όπου α(p) = Α) και επίσης ότι όλοι οι άνθρωποι είναι πράγματι θνητοί (άρα με ενδιαφέρουν ΜΟΝΟ οι γραμμές του πίνακα αλήθειας που έχουν <u>α</u>(p→q) = Α).
- Με άλλα λόγια: Με ενδιαφέρει ΜΟΝΟ η γραμμή 1 του πίνακα αλήθειας, που εξασφαλίζει α(p) = Α) ΚΑΙ <u>α</u>(p → q) = Α. Για τη γραμμή αυτή ισχύει ότι α(q)=Α.

Σημασιολογική Προσέγγιση (ΙΙ)

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Με Χρήση Νόμων ΠΛ.

Θέλω νδο $\{ p \rightarrow q , p \} \models q$, ή ισοδύναμα, $\{ (p\rightarrow q) \wedge p\} \models q$:

$(p \rightarrow q) \wedge p$	Υπόθεση
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge p$	Ν. αντικατάστασης
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)$	Ν. επιμεριστικότητας
$\equiv \alpha \vee (q \wedge p)$	Ν. αποκλεισμού τρίτου: $\neg p\wedge p \equiv \alpha$
$\equiv q \wedge p$	Ν. απορρόφησης: $\alpha \vee \varphi \equiv \varphi$
$\models q$	$\varphi \wedge \chi \models \varphi$, από πίνακες αλήθειας

ΆΡΑ: $\{ p \rightarrow q , p \} \models q$

Σημασιολογική Προσέγγιση (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Λ.13: Επιβεβαιώστε ότι **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ έγκυρο** οποιοδήποτε επιχείρημα γράφεται στη μορφή:

1. $p \rightarrow q \vee \neg r$
2. $q \rightarrow p \wedge r$

$\therefore$ $p \rightarrow r$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1ος τρόπος: Κάνουμε **κοινό πίνακα αλήθειας** για να διαπιστώσουμε τελικά ότι ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ότι

$$\{ p \rightarrow q \vee \neg r , q \rightarrow p \wedge r \} \quad \models \quad p \rightarrow r$$

2ος τρόπος: Δείχνουμε ότι ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ **ταυτολογία** ο τύπος:

$$(p \rightarrow q \vee \neg r) \wedge (q \rightarrow p \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Σημασιολογική Προσέγγιση (IV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Λ.13 (συνέχεια): Παραθέτουμε την απόδειξη με βάση το 2ο τρόπο.

(p	→	q	∨	¬	r)	∧	(q	→	p	∧	r)	→	(p	→	r)
												Ψ			
						Α						**Ψ**		**Ψ**	
Α	**Α**				**Ψ**	**Α**		**Α**	**Α**		**Ψ**	**Ψ**	**Α**	**Ψ**	**Ψ**
Α	**Α**		**Α**	**Α**	**Ψ**	**Α**		**Α**	**Α**	**Ψ**	**Ψ**	**Ψ**	**Α**	**Ψ**	**Ψ**
Α	**Α**	**Ψ**	**Α**	**Α**	**Ψ**	**Α**	**Ψ**	**Α**	**Α**	**Ψ**	**Ψ**	**Ψ**	**Α**	**Ψ**	**Ψ**

ΑΡΑ: Για α(p) = **Α**, α(q) = α(r) = **Ψ**, ο τύπος γίνεται **ψευδής**, συνεπώς δεν είναι ταυτολογία, και άρα **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΓΚΥΡΟΣ** ο ισχυρισμός του παραδείγματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ με Σημασιολογική Προσέγγιση

- Πολλές φορές πρέπει (τελικά) να καταφεύγουμε σε πίνακες αλήθειας.
- Πάρα πολλοί κανόνες (πχ, Νόμοι της ΠΛ) που θα πρέπει να θυμόμαστε και να αξιοποιούμε (ώστε να αποφύγουμε τον πίνακα αλήθειας).
- Χρειαζόμαστε ένα **μηχανικό τρόπο** ελέγχου ορθότητας επιχειρημάτων, που να βασίζεται σε όσο το δυνατόν λιγότερα «δόγματα» και να διαθέτει (λίγους αλλά ισχυρούς) κανόνες παραγωγής νέας γνώσης.
- ΠΩΣ? Με τη **Συντακτική Προσέγγιση**!!!

Προτασιακός Λογισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛ.6: Ένα ζεύγος <Α,Κ> λέγεται **αξιωματικό σύστημα** για τον Προτασιακό Λογισμό αν το Α είναι σύνολο προτασιακών τύπων (τα **αξιώματα**, ή **αξιωματικά σχήματα**) και το Κ είναι σύνολο σχέσεων που αντιστοιχούν ν-άδες προτασιακών τύπων σε προτασιακούς τύπους (οι **αποδεικτικοί κανόνες**).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛ.7: Το **αξιωματικό σύστημα** $<A_0,K_0>$ ορίζεται ως εξής:

- **Αξιώματα** (ή **Αξιωματικά Σχήματα** – ΑΣ) του A_0 : Δεχόμαστε (ΜΟΝΟ) την αλήθεια των ακόλουθων συντακτικών μορφών:
  - **[ΑΣ1]** $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
  - **[ΑΣ2]** $[\, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\,] \rightarrow [\,(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\,]$
  - **[ΑΣ3]** $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow [\,(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\,]$
- **Κανόνας** του K_0**:** Δεχόμαστε (ΜΟΝΟ) την ισχύ των ακόλουθων ταυτολογικών συνεπαγωγών:
  - **[Modus Ponens (MP)]** $\{\alpha ,\, \alpha \rightarrow \beta\} \models \beta$
  - **[Modus Tollens (MT)]** $\{\neg\beta ,\, \alpha \rightarrow \beta\} \models \neg\alpha$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛ.8: Αν μας δίνεται ένα σύνολο προτασιακών τύπων Τ = { χ_1 , ... , χ_κ }, που θεωρούμε ως **ΑΡΧΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ**, **τυπική απόδειξη για έναν τύπο φ**, λέγεται οποιαδήποτε **πεπερασμένη ακολουθία** προτασιακών τύπων $\varphi_1,...,\varphi_\lambda$ τ.ώ.:

1. Ο τύπος φ να ταυτίζεται με τον φ_λ, και
2. Για κάθε $1 \le \mu \le \lambda$, ο προτασιακός τύπος φ_μ είτε ανήκει στο $A_0 \cup T$ (ΑΣ ή αρχική υπόθεση), ή προκύπτει από τους τύπους του συνόλου
$$A_0 \cup T \cup_{1 \le \nu \le \kappa-1} \{ \varphi_\nu \}$$
κάνοντας χρήση του αποδεικτικού κανόνα Modus Ponens.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: Τ |– φ ή { χ1 , ... , χκ } |– φ.

ΑΝ { } |– φ (ή αλλιώς, |– φ) **ΤΟΤΕ** ο φ καλείται **τυπικό θεώρημα**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΛ.14: Αποδείξτε ότι είναι **τυπικό θεώρημα** ο προτασιακός τύπος $\varphi \to \varphi$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μας ζητείται να αποδείξουμε ότι $\vdash \varphi \to \varphi$. Θα πρέπει να βασιστούμε **ΜΟΝΟ** στους **ΑΣ1**,**ΑΣ2**,**ΑΣ3** και στα **MP MT**, αφού το σύνολο των αρχικών μας υποθέσεων είναι ΚΕΝΟ. Ας δούμε όμως πώς μπορούμε να το κάνουμε:

1.	$\{ \varphi \to [(\varphi \to \varphi) \to \varphi] \} \to \{ [\varphi \to (\varphi \to \varphi)] \to (\varphi \to \varphi) \}$	ΑΣ2
2.	$\varphi \to [(\varphi \to \varphi) \to \varphi]$	ΑΣ1
3.	$[\varphi \to (\varphi \to \varphi)] \to (\varphi \to \varphi)$	1,2MP
4.	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	ΑΣ1
5.	$\varphi \to \varphi$	3,4MP

Παραδείγματα Τυπικών Αποδείξεων (II)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΛ.15: Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος προτασιακών τύπων φ,ψ, ισχύει ότι: $\{ \neg\varphi \} \vdash [(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi]$.

Ο συμβολισμός |– παραπέμπει σε παροχή **ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ**.

ΣΚΕΠΤΙΚΟ (όχι τυπική απόδειξη)**:** Ζητούμενο = $[(\neg\psi \rightarrow \varphi)\rightarrow\psi]$.

- Τι θα χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το ζητούμενο?
- Ομοιότητα με συμπέρασμα ΚΑΠΟΙΑΣ μορφής του ΑΣ3:

$$[\neg\psi \rightarrow \neg\varphi] \rightarrow [(\neg\psi \rightarrow \varphi)\rightarrow\psi]$$

- **ΑΡΑ:** Θα αρκούσε νδο (δεδομένων των αρχικών υποθέσεων) ισχύει ο τύπος $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$. Αυτό όμως «θυμίζει» ΑΣ1:

$$\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

  για το οποίο αληθεύει η υπόθεση της συνεπαγωγής (δόθηκε σαν αρχική υπόθεση).

- Ποια είναι λοιπόν η ζητούμενη **τυπική απόδειξη**???

Παραδείγματα Τυπικών Αποδείξεων (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΛ.15 (συνέχεια): Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος προτασιακών τύπων φ,ψ, ισχύει:

$$\{ \neg\varphi \} \vdash [(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi]$$

Δημιουργώ την τυπική απόδειξη, ακολουθώντας ανάποδα το προηγούμενο σκεπτικό:

1. $\neg\varphi$	Υπόθεση
2. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi\rightarrow\neg\varphi)$	ΑΣ1
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	1,2MP
4. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow [(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi]$	ΑΣ3
5. $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$	3,4MP

Παραδείγματα Τυπικών Αποδείξεων (IV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΛ.16: Αν εφαρμόσουμε τον **ΑΣ3** για τους υποτύπους φ και ψ = ¬χ έχουμε:

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\chi) \rightarrow [(\neg\varphi \rightarrow \neg\chi) \rightarrow \varphi].$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι επίσης ισχύει:

$$(\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\neg\varphi \rightarrow \neg\chi) \rightarrow \varphi]$$

(ως άμεση εφαρμογή του **ΑΣ3**)?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

ΟΧΙ

(αν θέλουμε να είμαστε απόλυτα ακριβείς με το αξιωματικό σύστημα που θεωρούμε).

Επιπρόσθετοι Αποδεικτικοί Κανόνες

- **Γενίκευση:** $\{ \varphi \} \models \varphi \vee \chi$
- **Ειδίκευση:** $\{ \varphi \wedge \chi \} \models \varphi$
- **Απαλοιφή:** $\{ \varphi \vee \chi , \neg\varphi \} \models \chi$
- **Διαχωρισμός Περιπτώσεων:**
  $\{ \varphi \vee \chi , \varphi \rightarrow \psi , \chi \rightarrow \psi \} \models \psi$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι συγκεκριμένοι κανόνες ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ απαραίτητοι (βλ. παρακάτω Θεωρήματα Εγκυρότητας – Πληρότητας) για να αποδείξουμε την ορθότητα ενός επιχειρήματος, αλλά μερικές φορές βοηθούν.

ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε τον Διαχωρισμό Περιπτώσεων με χρήση Νόμων της ΠΛ (σημασιολογική προσέγγιση).

Βασικά Θεωρήματα της ΠΛ (Ι)

ΠΡΟΤΑΣΗ ΠΛ.2 [Θεώρημα της Απαγωγής]:

Για οποιοδήποτε ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ σύνολο προτασιακών τύπων $T \subseteq T(\Gamma_0)$, και οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$,

ΑΝ $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ **ΤΟΤΕ** $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΛ.17: Αξιοποιώντας το Θ. της Απαγωγής, να αποδείξετε τα ακόλουθα **ΤΥΠΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ**:

- **Τ.Θ. Διπλής Άρνησης:** $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ ΚΑΙ $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
- **Τ.Θ. Μεταβατικότητας:** $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\, (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \,]$
- **Τ.Θ. Αντιθετοαναστροφής:** $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Απόδειξη για Τ.Θ. Αντιθετοαναστροφής

- **Τ.Θ. Αντιθετοαναστροφής:** $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- Αρκεί νδο (2 Χ Θ.Απαγωγής): $\{\, \varphi \rightarrow \neg\psi \,,\, \psi \,\} \vdash \neg\varphi$

1.	ψ	Υπόθεση
2.	$\varphi \rightarrow \neg\psi$	Υπόθεση
3.	$(\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow [(\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi]$	ΑΣ3
4.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	Τ.Θ. $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
5.	$(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow [\, (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)]$	Τ.Θ. $\vdash (\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow [(\beta\rightarrow\gamma) \rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)]$
6.	$(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	4,5MP
7.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	2,6MP
8.	$(\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi$	7,3MP
9.	$\psi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$	ΑΣ1
10.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \psi$	1,9MP
11.	$\neg\varphi$	10,8MP

Εξάσκηση στην Απαγωγή

ΑΣΚΗΣΗ: Νδο

1. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$
2. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Αρκεί νδο (Θ. Απαγωγής) : $\{ \varphi \rightarrow \psi \} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \psi$

1.	$\varphi \rightarrow \psi$	Υπόθεση
2.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	Τ.Θ. Διπλής Άρνησης
3.	$[\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)]$	Τ.Θ. Μεταβατικότητας
4.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$	2,3 MP
5.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \psi$	1,4 MP

2. Όμοια απόδειξη (αφήνεται ως εξάσκηση).

Βασικά Θεωρήματα της ΠΛ (ΙΙ)

ΠΡΟΤΑΣΗ ΠΛ.3 [Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής]:
Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους $\varphi,\psi \in T(\Gamma_0)$, ισχύει ότι:

$T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ **ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ** $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΛ.18: Για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ,ψ, νδο είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ ο τύπος:

$$\vdash \varphi \rightarrow [\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)]$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Αρκεί νδο: $\{\varphi, \neg\psi \} \vdash \neg(\varphi\rightarrow\psi)$ (Θ. Απαγωγής x2)
- Ισοδύναμο με: $\{\varphi, \varphi\rightarrow\psi \} \vdash \neg\neg\psi$ (Θ. Αντιθετοαναστροφής).

1.	φ	Υπόθεση
2.	$\varphi \rightarrow \psi$	Υπόθεση
3.	ψ	1,2MP
4.	$\psi \rightarrow \neg\neg\psi$	Τυπικό Θεώρημα $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$
5.	$\neg\neg\psi$	3,4MP

Συνεπή και Αντιφατικά Σύνολα

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛ.9:
Ένα σύνολο προτασιακών τύπων $T \subseteq T(\Gamma_0)$ είναι **συνεπές** αν και μονο αν **ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ** προτασιακός τύπος $\psi \in T(\Gamma_0)$ τέτοιος ώστε T |– ψ ΚΑΙ T |– ¬ψ. Διαφορετικά το T είναι **αντιφατικό**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Λ.19: Έστω ένας οποιοσδήποτε τύπος φ.

- Το σύνολο {φ, ¬φ} είναι...

  ... <u>αντιφατικό</u> αφού ισχύει ότι {φ, ¬φ} **|–** φ, και βέβαια ισχύει επίσης ότι {φ, ¬φ} **|–** ¬φ.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι σχέση έχει η <u>συνέπεια / αντιφατικότητα</u> με την <u>ικανοποιησιμότητα / μη ικανοποιησιμότητα</u> ενός συνόλου τύπων T?

Βασικά Θεωρήματα της ΠΛ (ΙΙΙ)

ΠΡΟΤΑΣΗ ΠΛ.4 [Θεώρημα της Απαγωγής Σε Άτοπο]:
Για κάθε <u>πεπερασμένο</u> σύνολο προτασιακών τύπων T και οποιοδήποτε προτασιακό τύπο φ, ισχύει ότι:
ΑΝ το $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό **ΤΟΤΕ** T |– ¬φ.

Βασικά Θεωρήματα της ΠΛ (IV)

ΠΡΟΤΑΣΗ Λ.5 [Θεώρημα Εγκυρότητας -- Πληρότητας]:
Για οποιοδήποτε σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{\varphi_1,...,\varphi_\kappa\}$, και οποιοδήποτε προτασιακό τύπο ψ, ισχύει ότι:

ΑΝ T |– ψ **ΤΟΤΕ** T |= ψ (θ. Εγκυρότητας)

ΑΝ T |= ψ **ΤΟΤΕ** T |– ψ (θ. Πληρότητας)

ΑΣΚΗΣΗ: Εξηγήστε για ποιον λόγο ένα σύνολο προτασιακών τύπων είναι μη ικανοποιήσιμο **ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ** είναι αντιφατικό.

Βασικά Θεωρήματα της ΠΛ (V)

ΠΡΟΤΑΣΗ Λ.6 [Θεώρημα Συμπάγειας]: Έστω T ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε και το T είναι ικανοποιήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
- Έστω (για χάρη της απαγωγής σε ΑΤΟΠΟ) ότι κάθε πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ είναι ικανοποιήσιμο, αλλά το T είναι μη ικανοποιήσιμο.
- α : μια οποιαδήποτε αντίφαση.
- $\tau = \neg\alpha$: μια ταυτολογία.
- $T\cup\{\tau\} = T\cup\{\neg\alpha\}$: ΜΗ ικανοποιήσιμο
- $T\cup\{\tau\} = T\cup\{\neg\alpha\}$: Αντιφατικό (θ. Πληρότητας).
- $T \vdash \neg\tau$: (θ. απαγωγής σε άτοπο).
- $\Sigma = \{ \psi_1 ,..., \psi_\kappa \}$: (Πεπερασμένο) σύνολο των βημάτων τυπικής απόδειξης.
- $T_0 = \Sigma\cap T$: Πεπερασμένο υποσύνολο αρχικών υποθέσεων.
- $T_0 \vdash \alpha$: Από ορισμό του Σ.
- $T_0 \models \alpha$: (θ. Εγκυρότητας).
- $T_0 \models \neg\alpha = \tau$: Οποιοδήποτε σύνολο τύπων συνεπάγεται μια ταυτολογία.

∴ Το T_0 ΔΕΝ είναι ικανοποιήσιμο (ΑΤΟΠΟ)

Μερικές Ασκήσεις Επανάληψης (Ι)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΠ.1 Έστω φ, ψ προτασιακοί τύποι. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

i. Αν $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$, τότε ο προτασιακός τύπος $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ είναι τυπικό θεώρημα.

ii. Το $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ αποτελεί *άμεση συνέπεια* της εφαρμογής του Θεωρήματος Απαγωγής στο $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

iii. Έστω ότι $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$. Το γεγονός ότι ο προτασιακός τύπος $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία αποτελεί *άμεση συνέπεια* του θεωρήματος εγκυρότητας του προτασιακού λογισμού.

iv. Η ισοδυναμία των $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ και $\{\varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \psi$ αποτελεί *άμεση συνέπεια* του Θεωρήματος Αντιθετοαναστροφής.

Μερικές Ασκήσεις Επανάληψης (ΙΙ)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΠ.2 Έχετε ξεχάσει τα γυαλιά σας και κάνετε τους εξής συλλογισμούς:

(α)	**ΑΝ** τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας **ΤΟΤΕ** τα είδα την ώρα του πρωινού	γκζ επρ
(β)	Διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό **Ή** (διάβαζα εφημερίδα) στην κουζίνα	εκθ εκζ
(γ)	**ΑΝ** διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό **ΤΟΤΕ** τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ	εκθ γκφ
(δ)	**ΔΕΝ** είδα τα γυαλιά μου κατά τη διάρκεια του πρωινού	επρ
(ε)	**ΑΝ** διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι **ΤΟΤΕ** τα γυαλιά μου είναι στο κομοδίνο	βκρ γκμ
(ζ)	**ΑΝ** διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα **ΤΟΤΕ** τα γυαλιά μου είναι στο τραπέζι της κουζίνας	εκζ γκζ

Βρείτε πού είναι τα γυαλιά. Δώστε <u>τυπική απόδειξη</u> για την ορθότητα του επιχειρήματός σας.

Μερικές Ασκήσεις Επανάληψης (III)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ άσκησης 2:

1.	γκζ $\rightarrow$ επρ	Υπόθεση
2.	εκθ $\vee$ εκζ $\equiv \neg\neg$εκθ $\vee$ εκζ $\equiv \neg$εκθ $\rightarrow$ εκζ	Υπόθεση
3.	εκθ $\rightarrow$ γκφ	Υπόθεση
4.	$\neg$επρ	Υπόθεση
5.	βκρ $\rightarrow$ γκμ	Υπόθεση
6.	εκζ $\rightarrow$ γκζ	Υπόθεση
7.	$\neg$γκζ	1,4 Modus Tollens
8.	$\neg$εκζ	6,7 Modus Tollens
9.	$\neg\neg$εκθ	2,8 Modus Tollens
10.	$\neg\neg$εκθ $\rightarrow$ εκθ	Τ.Θ. $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
11.	εκθ	9,10 Modus Ponens
12.	γκφ	11,3 Modus Ponens

$\therefore$ Τα γυαλιά βρίσκονται στο τραπεζάκι του καφέ.

Μερικές Ασκήσεις Επανάληψης (IV)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΠ.3 Έστω p1 και p2 προτασιακές μεταβλητές. Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές? Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(1) Ο προτασιακός τύπος $(p1 \rightarrow p2) \rightarrow (\neg p2 \rightarrow \neg p1)$ είναι ταυτολογία.

(2) Ο προτασιακός τύπος $(p1 \rightarrow p2) \rightarrow (\neg p1 \wedge \neg p2)$ είναι αντίφαση.

(3) $p1 \wedge \neg p1 \models p2 \wedge \neg p2$.

(4) $(p1 \wedge \neg p1) \rightarrow p2 \models p2$.

Μερικές Ασκήσεις Επανάληψης (V)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΠ.4 Εξετάστε μεταξύ των τύπων $\varphi = p \to (q \to r)$ και $\chi = (p \to q) \to r$, αν κάποιος συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλον. Τεκμηριώστε την απάντηση που θα δώσετε.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1289.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης