ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Μηχανική του Συνεχούς Μέσου

## Εισαγωγή

**Διδάσκων : Καθηγητής Β. Καλπακίδης**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Η υπόθεση του συνεχούς σώματος

Σε αυτό το μάθημα θα προσπαθήσουμε να συζητήσουμε και να κατανοήσουμε τις σημαντικότερες έννοιες της Μηχανικής του Συνεχούς. Πρέπει από την αρχή να κάνουμε διάκριση μεταξύ της Μηχανικής του Υλικού Σημείου, με τις βασικές έννοιες της οποίας είμαστε εξοικειωμένοι, και της Μηχανική του Συνεχούς. Για την πρώτη, τόσο η κινηματική όσο και οι θεμελιώδεις αρχές της αφορούν σε ένα υλικό σημείο το οποίο, εξ' ορισμού, έχει μηδενικό όγκο και εφοδιάζεται με μια πεπερασμένη (μη–μηδενική) μάζα. Κατόπιν είναι δυνατόν να επεκταθούμε σε ένα σύστημα υλικών σημείων που μπορεί να προσομοιάσει το στερεό σώμα. 'Ομως, σε ένα τέτοιο στερεό σώμα δεν είναι δυνατόν να οριστεί η έννοια *της πυκνότητας της μάζας σε ένα σημείο* γιατί στο πηλίκο μάζα προς όγκο ο παρανομαστής μηδενίζεται. Επομένως, ξεκινώντας από τις θεμελιώδεις έννοιες της Μηχανικής του Υλικού Σημείου δε μπορεί να φτάσει κανείς στην έννοια της πυκνότητας μάζας σε ένα σημείο, η οποία όμως είναι απαραίτητη όταν διαπραγματευόμαστε προβλήματα με στερεά σώμστα ή ρευστά. Δηλαδή σε όλα σχεδόν τα προβλήματα Μηχανικού.

Αντίθετα, η Μηχανική του Συνεχούς ξεκινά αξιωματικά από την *υπόθεση της συνεχούς κατανομής της ύλης*. 'Ετσι, δεχόμαστε την ύπαρξη του **συνεχούς σώματος** επί του οποίου ορίζεται η πυκνότητα μάζας, καθώς και οποιαδήποτε άλλη πυκνότητα (π.χ. πυκνότητα ενέργειας). Είναι σαφές ότι με αυτό τον τρόπο *το υλικό σημείο της Μηχανικής του Υλικού Σημείου είναι διαφορετικό απο το αντίστοιχο υλικό σημείο της Μηχανικής του Συνεχούς.* Το πρώτο έχει μη–μηδενική μάζα ενω στο δεύτερο η μάζα του είναι εξ' ορισμού μηδενική.

Φυσικά, η υπόθεση του συνεχούς έρχεται σε ευθεία αντίθεση με την πραγματική δομή της ύλης, η οποία όπως είναι γνωστό σε όλους είναι διακριτή δηλαδή αποτελείται από άτομα και μόρια. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η Μηχανική του Συνεχούς δεν αποτελεί μια θεωρία κατάλληλη για να διερευνήσουμε τη δομη της ύλης, αλλά για να κατανοήσουμε και να προβλέψουμε την κίνηση της ύλης στο μακροσκοπικό (φαινομενολογικό) επίπεδο. Σε αυτό το επίπεδο ακόμη και σε ένα πολύ μικρό κομμάτι της ύλης (ας πούμε της τάξης των $\mathrm{mm}^3$) υπάρχει ένας τεράστιος αριθμός[1] μορίων που αποθαρρύνει οποιαδήποτε σκέψη να αναλυθεί η κίνηση με βάση τη ξεχωριστή συμπεριφορά των επιμέρους μορίων που συγκροτούν το σώμα.

Από την άλλη πλευρά, η υπόθεση της συνέχειας της ύλης, όπως και κάθε άλλη επιστημονική υπόθεση, αποτελεί μια εξιδανίκευση της πραγμάτικότητας η οποία, σε τελευταία ανάλυση, ελέγχεται από το πείραμα. Άλλωστε πρέπει να μάθουμε να διακρίνουμε τις έννοιες ή τα εννοιολογικά σχήματα, που εισάγονται συνήθως αξιωματικά, από τα φυσικά αντικείμενα ή τις διεργασίες που προσπαθούν (ατελώς) να περιγράψουν. Οποιοδήποτε θεωρητικό σχήμα και όποιαδήποτε επιστημονική θεωρία βρίσκονται κάπου μέσα στο μυαλό μας, δηλαδή ανήκουν στον **κόσμο των ιδεών**, ενώ τα φυσικά φαινόμενα βρίσκονται έξω από εμας, στην **αντικειμενική πραγματικότητα**[2].

## 1.2 Η έννοια της πυκνότητας μάζας

Ας συζητήσουμε λεπτομερέστερα τώρα για την πυκνότητα μάζας. Όπως γνωρίζουμε όλοι *η μέση πυκνότητα ενός τμήματος $\Omega$ σε ένα σώμα* $\mathbf{B}$ *ορίζεται ως το πηλίκο της μάζας που περιέχεται σε αυτό το τμήμα του σώματος προς τον αντίστοιχο όγκο,* δηλαδή

$$\rho(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{V(\Omega)}, \tag{1.1}$$

όπου με $m(\Omega)$ και $V(\Omega)$ συμβολίζονται η μάζα και όγκος του $\Omega$, αντιστοίχως.

Στη Μηχανική του συνεχούς αξιώνουμε να υπάρχει η πυκνότητα ως συνάρτηση της θέσης. Δηλαδή να υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση της θέσης που να μας δίνει την πυκνότητα *σε κάθε σημείο του σώματος*. Προφανώς αυτό είναι αδύνατο να γίνει με τη σχέση (1.1). Μπορούμε ωστόσο να ορίσουμε την πυκνότητα στη θέση $\mathbf{x}$ ως μια οριακή διαδικασία που να σχετίζεται με το πηλίκο (1.1). Ας πάρουμε το πηλίκο (1.1) για μια σφαίρα $\Omega_\varepsilon$ με κέντρο το σημείο $\mathbf{x}$ (στο οποίο θέλουμε να ορίσουμε την πυκνότητα) και ακτίνα $\varepsilon$. Τότε μπορούμε να πούμε ότι η πυκνότητα στο $\mathbf{x}$ μπορεί να προσεγγιστεί από τη μέση πυκνότητα της σφαίρας, δηλαδή

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{m(\Omega_\varepsilon)}{V(\Omega_\varepsilon)}. \tag{1.2}$$

[1] Σέ 1 $\mathrm{mm}^3$ ενός μονοατομικού κρυσταλλικού υλικού υπάρχουν περίπου $10^{21}$ άτομα.

[2] Για όσους βέβαια αποδέχονται την ύπαρξη της "αντικειμενικής πραγματικότητας". Για παράδειγμα, ο επίσκοπος Berkeley που άσκησε δριμεία κριτική στον Απειροστικό Λογισμό του Νεύτωνα δεν τη δεχόταν.

Προφανώς, το πηλίκο (1.2) εξαρτάται από το $\varepsilon$. Επίσης είναι φανερό ότι όσο πιο μικρή είναι η ακτίνα της σφαίρας τόσο πιο καλά θα προσεγγίζει την πυκνότητα στο σημείο $\mathbf{x}$. Αν μπορούμε να ελαττώνουμε την ακτίνα όσο θέλουμε χωρίς περιορισμό "φτάνουμε" στην έννοια του ορίου. Επομένως, μπορούμε *να ορίσουμε την πυκνότηta μάζας στο σημείο* $\mathbf{x}$ *ως το όριο*

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(\Omega_\varepsilon)}{V(\Omega_\varepsilon)}, \tag{1.3}$$

όπου στην παραπάνω έκφραση το $\Omega_\varepsilon$ δεν είναι πλέον σφαίρα αλλα ένα οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του σώματος που περιέχει υποχρεωτικά το σημείο $\mathbf{x}$ (δηλ. $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$, $\forall \varepsilon$) και $\epsilon$ είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του, π.χ. η διάμετρος του.

Αν μπορούμε να να ορίσουμε την πυκνότητα μάζας για κάθε σημείο του σώματος, τότε θα έχουμε στη διάθεση μας μια συνάρτηση που θα ορίζεται σε ολόκληρο το σώμα

$$\rho(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B}. \tag{1.4}$$

Έτσι, ένα οποιοδήποτε τμήμα του σώματος $\Omega$, θα έχει μάζα:

$$m(\Omega) = \int_\Omega \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

όπου το σύμβολο $\int_\Omega$ σημαίνει ολοκλήρωση επί του χωρίου $\Omega$. Μπορεί δηλαδή να σημαίνει τριπλό, διπλό ή ορισμένο ολοκλήρωμα ανάλογα με το αν το $\Omega$ είναι υποσύνολο του $I\!R^3$, του $I\!R^2$ ή του $I\!R$. Στην σχέση (1.5), με δεδομένο ότι το σώμα μας είναι τρισδιάστατο, το ολοκλήρωμα αυτό σημαίνει:

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iiint_\Omega \rho(x_1, \chi_2, \chi_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

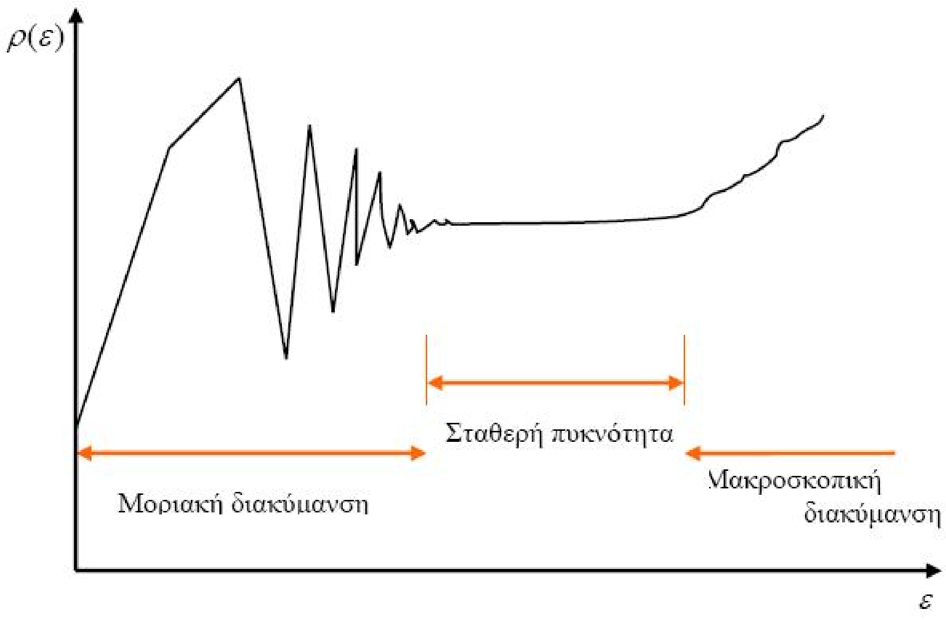
Αν ενά σώμα έχει ομογενή κατανομή πυκνότητας, δηλαδή αν η πυκνότητα είναι μια σταθερή συνάρτηση ($\rho(\mathbf{x}) = \rho_0$), τότε το ολοκλήρωμα (1.5) γίνεται

$$m(\Omega) = \int_\Omega \rho_0 d\mathbf{x} = \rho_0 \int_\Omega d\mathbf{x} = \rho_0 V(\Omega),$$

ένα αποτέλεσμα γνωστό από τα Λυκειάκα μαθήματα.

Υπενθυμίζουμε ότι το όριο (1.3) που ορίζει την πυκνότητα αποτελεί μια μαθηματική εξιδανίκευση. Στην πραγματικότητα, αν κάποιος επιχειρήσει να πραγματοποιήσει την οριακή διαδικασία της (1.3) σε ένα πραγματικό υλικό, τότε θα προκύψει ένα απότελεσμα που εξαρτάται έντονα από την τιμή της παραμέτρου $\varepsilon$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.

Ταυτόχρονα όμως θα παρατηρήσει ότι *υπάρχει ένα διάστημα όπου η πυκνότητα γίνεται ανεξάρτητη από το* $\varepsilon$, γεγονός που δικαιολογεί την σύγκλιση που περιγράφεται από το όριο




**Σχήμα 1.1.** *Η διακύμανση της μέσης πυκνότητας μάζας σε σχέση με το χαρακτηριστικό μήκος ε.*

(1.3). Ταυτόχρονα όμως θέτει ένα "κάτω όριο" για την ισχύ μιας θεωρίας που βασίζεται στην **υπόθεση του συνεχούς**. Το όριο αυτό σχετίζεται με τις διατομικές αποστάσεις που στα στερεά είναι της τάξης του $10^{-10}m$. Αν πλησιάσουμε ή πολύ περισσότερο αν διασχίσουμε αυτό το όριο μπαίνουμε στο "βασίλειο" της διακριτής ύλης και η Μηχανική του Συνεχούς δεν αποτελεί πλέον έγκυρο αναλυτικό εργαλείο.

# Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1296.

# Σημείωμα Αναφοράς

# Σημείωμα Αδειοδότησης