ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Ενότητα: Δακτύλιοι, Ακέραιες Περιοχές, Σώματα

Διδάσκων: Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος

Τμήμα: Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικές Έννοιες

1.1 Δακτύλιοι, Ακέραιες Περιοχές, Σώματα

Υπενθυμίζουμε ότι ένας *δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο* είναι μια τριάδα $(R, +, \cdot)$, όπου το ζεύγος $(R, +)$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $\cdot : R \times R \to R$, είναι μια προσεταιριστική πράξη που επιμερίζει την «$+$», δηλαδή $\forall a, b, c \in R$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. Επιπλέον, ο R περιέχει ένα μοναδικό στοιχείο, το 1_R που συμπεριφέρεται ουδέτερα ως προς την «$\cdot$», δηλαδή $\forall a \in R$ είναι $a \cdot 1_R = a = a \cdot 1_R$. Η πράξη «$+$» ονομάζεται η *πρόσθεση* του R και η «$\cdot$» ο *πολλαπλασιασμός* του R. Αν $a, b \in R$, ονομάζουμε το αποτέλεσμα $a + b$, το *άθροισμα* των a, b και το αποτέλεσμα $a \cdot b$ το *γινόμενο* των a, b. Θα αποκαλούμε τους δακτύλιους με μοναδιαίο στοιχείο *μοναδιαίους δακτύλιους*. Συχνά, το γινόμενο των $a, b \in R$, το συμβολίζουμε απλώς με ab, αντί του $a \cdot b$. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ ονομάζεται *μεταθετικός* αν, $\forall a, b \in R$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Θα ονομάζουμε έναν μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$, *τετριμμένο* αν, $1_R = 0_R$. Σε αυτήν την περίπτωση ο R αποτελείται από ακριβώς από ένα στοιχείο, το 0_R, αφού αν, $a \in R$, τότε $a = 1_R a = 0_R a = 0_R$.

Στο παρόν μάθημα όλοι οι δακτύλιοι θεωρούνται μεταθετικοί και μοναδιαίοι.

Παραδείγματα 1.1.1. (α΄) Οι τριάδες $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, όπου «$+$» και «$\cdot$» είναι οι συνήθεις πράξεις τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού, αποτελούν μεταθετικούς μοναδιαίους δακτυλίους.

(β΄) Η τριάδα $(\mathcal{M}_n(R), +, \cdot)$, όπου $(R, +, \cdot)$, είναι οποιοσδήποτε μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος, «$+$» είναι η πρόσθεση πινάκων και «$\cdot$» ο πολλαπλασιασμός, (που ορίζονται με τον συνήθη τρόπο) αποτελεί έναν μοναδιαίο δακτύλιο, ο οποίος ωστόσο δεν είναι μεταθετικός, όταν $n \geq 2$.

Ορισμός 1.1.1. Σε έναν μεταθετικό δακτύλιο $(R, +, \cdot)$ ένα στοιχείο $a \neq 0_R$ ονομάζεται *διαιρέτης τού μηδενός* αν, υπάρχει κάποιο $b \in R, b \neq 0_R$ με $ab = 0_R$.

Ορισμός 1.1.2. Ένας μη τετριμμένος μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος $(D, +, \cdot)$ ονομάζεται *ακέραια περιοχή* αν, δεν διαθέτει διαιρέτες του μηδενός.

Παραδείγματα 1.1.2. (α΄) Οι δακτύλιοι $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι ακέραιες περιοχές.

(β΄) Το ευθύ γινόμενο $R \times S$ δύο μη τετριμμένων μοναδιαίων δακτυλίων $(R, +_R, \cdot_R)$ και $(S, +_S, \cdot_S)$ δεν αποτελεί ποτέ ακέραια περιοχή, αφού $(1_R, 0_S)(0_R, 1_S) = (1_R \cdot_R 0_R, 0_S \cdot_S 1_S) = (0_R, 0_S)$.

Ορισμός 1.1.3. Σε έναν μεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$, το στοιχείο $a \in R$ ονομάζεται *αντιστρέψιμο* αν, υπάρχει $b \in R$ με $ab = 1_R$.

Ορισμός 1.1.4. Ένας μη τετριμμένος μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος ονομάζεται *σώμα* αν, κάθε μη μηδενικό στοιχείο του είναι αντιστρέψιμο.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχείο a ενός μεταθετικού μοναδιαίου δακτύλιου $(R, +, \cdot)$ είναι *αντιστρέψιμο* αν, υπάρχει $b \in R$ με $ab = 1_R$. Στην περίπτωση αυτή το στοιχείο b είναι μοναδικό, ονομάζεται το *αντίστροφο* τού a και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα 1.1.3. (α΄) Οι δακτύλιοι $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι σώματα.

(β΄) Ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δεν είναι σώμα. Πράγματι, αν $a \in \mathbb{Z}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο, τότε υπάρχει $b \in \mathbb{Z}$ με $ab = 1_{\mathbb{Z}}$. Οι μόνοι **ακέραιοι αριθμοί** a με την ιδιότητα αυτή είναι οι $a = 1$ και $a = -1$.

Συνεπώς, μια ακέραια περιοχή δεν είναι απαραιτήτως σώμα. Ωστόσο κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.

Πρόταση 1.1.1. *Κάθε σώμα* $(K, +, \cdot)$ *είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το K δεν διαθέτει διαιρέτες τού μηδενός. Αν το $a \neq 0_K$ είναι διαιρέτης τού μηδενός, τότε υπάρχει $b \neq 0_K$ με $ab = 0_K$ (*). Αφού όμως $a \neq 0_K$, έπεται ότι υπάρχει το a^{-1} και από την (*) έχουμε: $a^{-1}(ab) = a^{-1}0_K \Leftrightarrow (a^{-1}a)b = 0_K \Leftrightarrow b = 0_K$, πράγμα άτοπο. □

Συμπληρώνουμε την παρούσα ενότητα υπενθυμίζοντας ότι *υποδακτύλιος* R' ενός δοθέντος μοναδιαίου δακτύλιου $(R, +, \cdot)$ είναι ένα υποσύνολο τού R που αποτελεί δακτύλιο με τις πράξεις τού R και όπου το μοναδιαίο στοιχείο τού R' συμπίπτει με το μοναδιαίο στοιχείο τού R.

Είναι δυνατόν ένας δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ να μην είναι σώμα, αλλά ωστόσο να περιέχει έναν υποδακτύλιο ο οποίος να είναι σώμα.

Παραδείγματα 1.1.4. Θεωρούμε το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ τού σώματος των ρητών αριθμών $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ με τον εαυτό του. Το υποσύνολο

$$\Delta = \{(q, q) \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

είναι ένας υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, που αποτελεί ένα σώμα.

1.2 Ο Δακτύλιος Πολυωνύμων μιας Μεταβλητής

Ένα *πολυώνυμο μιας μεταβλητής* με συντελεστές από έναν μεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$ ορίζεται ως μια απεικόνιση

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R,$$

όπου το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f(n) \neq 0_R\}$ είναι πεπερασμένο. Το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές από έναν μεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$ συμβολίζεται με $R[x]$.

Στο σύνολο $R[x]$ ορίζουμε την πράξη τής πρόσθεσης

$$+ : R[x] \times R[x] \to R[x], (f, g) \mapsto f + g, \text{ όπου} (f + g)(n) := f(n) + g(n), \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

και την πράξη τού πολλαπλασιασμού

$$\cdot : R[x] \times R[x] \to R[x], (f, g) \mapsto f \cdot g, \text{ όπου} (f \cdot g)(n) := \sum_{i+j=n} f(i)g(j), \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (*)$$

Κάθε στοιχείο $a \in R$, το ταυτίζουμε με το πολυώνυμο

$$a : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R,$$

που απεικονίζει το $0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ στο $a \in R$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R.

Κάθε τέτοιου είδους πολυώνυμο ονομάζεται *σταθερό πολυώνυμο* (η απλώς *σταθερά*). Ειδικότερα το πολυώνυμο

$$0 : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R,$$

δηλαδή το πολυώνυμο που απεικονίζει κάθε στοιχείο τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R, το ονομάζουμε *μηδενικό πολυώνυμο*.

Συμβολίζοντας με

$$x : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος. «Αλγεβρικές Δομές ΙΙ. Δακτύλιοι, Ακέραιες Περιοχές, Σώματα». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1299.

Σημείωμα Αδειοδότησης