ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές II

Ενότητα: Ο Δακτύλιος Πολυωνύμων μιας Μεταβλητής

Διδάσκων: Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

δακτύλιο με τις πράξεις τού R και όπου το μοναδιαίο στοιχείο τού R' συμπίπτει με το μοναδιαίο στοιχείο τού R.

Είναι δυνατόν ένας δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ να μην είναι σώμα, αλλά ωστόσο να περιέχει έναν υποδακτύλιο ο οποίος να είναι σώμα.

Παραδείγματα 1.1.4. Θεωρούμε το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ τού σώματος των ρητών αριθμών $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ με τον εαυτό του. Το υποσύνολο

$$\Delta = \{(q, q) \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

είναι ένας υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, που αποτελεί ένα σώμα.

1.2 Ο Δακτύλιος Πολυωνύμων μιας Μεταβλητής

Ένα *πολυώνυμο μιας μεταβλητής* με συντελεστές από έναν μεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$ ορίζεται ως μια απεικόνιση

$$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R,$$

όπου το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f(n) \neq 0_R\}$ είναι πεπερασμένο. Το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές από έναν μεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$ συμβολίζεται με $R[x]$.

Στο σύνολο $R[x]$ ορίζουμε την πράξη τής πρόσθεσης

$$+ : R[x] \times R[x] \to R[x], (f, g) \mapsto f + g, \text{ όπου} (f + g)(n) := f(n) + g(n), \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

και την πράξη τού πολλαπλασιασμού

$$\cdot : R[x] \times R[x] \to R[x], (f, g) \mapsto f \cdot g, \text{ όπου} (f \cdot g)(n) := \sum_{i+j=n} f(i)g(j), \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (*)$$

Κάθε στοιχείο $a \in R$, το ταυτίζουμε με το πολυώνυμο

$$a : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R,$$

που απεικονίζει το $0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ στο $a \in R$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R.

Κάθε τέτοιου είδους πολυώνυμο ονομάζεται *σταθερό πολυώνυμο* (η απλώς *σταθερά*). Ειδικότερα το πολυώνυμο

$$0 : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R,$$

δηλαδή το πολυώνυμο που απεικονίζει κάθε στοιχείο τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R, το ονομάζουμε *μηδενικό πολυώνυμο*.

Συμβολίζοντας με

$$x : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R$$

το πολυώνυμο που απεικονίζει το $1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ στο μοναδιαίο στοιχείο $1_R \in R$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε πολυώνυμο f παριστάνεται μοναδικώς ως

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f(i) x^i.$$

Προσέξτε, ότι από τον ορισμό τού πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, η δύναμη

$$x^i : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R, i \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$$

απεικονίζει το $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 1_R και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R. Τέλος, δεχόμαστε ότι η δύναμη x^0 ταυτίζεται με το πολυώνυμο 1, δηλαδή απεικονίζει το $0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 1_R και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τού $\mathbb{N} \cup \{0\}$ στο 0_R.
Έτσι, γράφοντας

$$a_0 x^0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \text{ ή απλώς } a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

εννοούμε το πολυώνυμο $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to R$ με $f(i) = a_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$ και $f(i) = 0, \forall i > n$. Τα $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ονομάζονται οι *συντελεστές* τού πολυωνύμου.

Πρόταση 1.2.1. *Αν $(R, +, \cdot)$ είναι ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος, τότε η τριάδα $(R[x], +, \cdot)$ αποτελεί επίσης έναν μοναδιαίο μεταθετικό δακτύλιο.*

Ο δακτύλιος $R[x]$ ονομάζεται ο *δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής* με συντελεστές από τον δακτύλιο R (ή υπεράνω τού δακτυλίου R).

Παραδοσιακά, η έννοια τού πολυωνύμου προέρχεται από την έννοια τής πραγματικής πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n,$$

όπου $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Έτσι για να δηλώσουμε ένα πολυώνυμο, θα γράφουμε συχνά $f(x)$ και θα ονομάζουμε το x μια *μεταβλητή*, μολονότι όπως είδαμε πιο πάνω το x δεν είναι μεταβλητή, αλλά μια εντελώς συγκεκριμένη απεικόνιση.

Ορισμός 1.2.1. Καλούμε *βαθμό* ενός μη μηδενικού πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ τον μεγαλύτερο αριθμό $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $f(i) = a_i \neq 0_R$.

Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο βαθμός τού μηδενικού πολυωνύμου ισούται με το «$-\infty$» (πλην άπειρο). Συνήθως συμβολίζουμε με $\deg f(x)$ τον βαθμό τού πολυωνύμου $f(x)$.

Συνεπώς,

$$\{\deg f(x) \mid f(x) \in R[x]\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\infty\}.$$

Για το σύμβολο «$-\infty$» δεχόμαστε ότι $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, -\infty < n$ καθώς και ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (-\infty) + n = -\infty = n + (-\infty) \text{ και } (-\infty) + (-\infty) = -\infty. \qquad (**)$$

Ονομάζουμε *επικεφαλής συντελεστή* ενός μη μηδενικού πολυωνύμου f, τον συντελεστή $f(i) = a_i$ με το μεγαλύτερο $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, όπου $f(i) \neq 0_R$.
Ονομάζουμε ένα μη μηδενικό πολυώνυμο *μονοστό*, αν ο επικεφαλής του συντελεστής ισούται με 1_R.

Παραδείγματα 1.2.1. Έστω ο δακτύλιος των ακεραίων αριθμών $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ και $\mathbb{Z}[x]$ ο αντίστοιχος δακτύλιος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω τού $\mathbb{Z}$.
Το πολυώνυμο $f_1(x) = 2 \in \mathbb{Z}[x]$ έχει $\deg f_1(x) = 0$, το $f_2(x) = 2 + x^{3n} \in \mathbb{Z}[x], n \in \mathbb{N}$ έχει $\deg f_2(x) = 3n$ και το πολυώνυμο $f_3(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, n \in \mathbb{N}$ έχει $\deg f_3(x) = n$. Ο επικεφαλής συντελεστής τού $f_1(x)$ είναι 2. Τα $f_2(x)$ και $f_3(x)$ είναι μονοστά πολυώνυμα.

Πρόταση 1.2.2. *Αν ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ είναι ακέραια περιοχή, τότε και ο δακτύλιος $R[x]$ είναι ακέραια περιοχή και μάλιστα $\forall f(x), g(x) \in R[x]$ είναι* $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

Απόδειξη. Αν ένα από τα δύο πολυώνυμα είναι το μηδενικό, τότε το γινόμενό τους είναι επίσης το μηδενικό πολυώνυμο και από την παραδοχή που κάναμε, βλ. (**), σχετικά με τον βαθμό τού μηδενικού πολυνωύμου έπεται η ισότητα $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

Αν ούτε το $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, ας πούμε ότι $\deg f(x) = n$, ούτε το $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, ας πούμε ότι $\deg g(x) = m$, τότε ο επικεφαλής συντελεστής τού γινομένου $f(x)g(x)$ είναι ο $a_n b_m \neq 0_R$, επειδή $a_n \neq 0_R, b_m \neq 0_R$ και επειδή ο R είναι ακεραια περιοχή. Συνεπώς, $\deg f(x)g(x) = n + m = \deg f(x) + \deg g(x)$. □

Παρατηρήσεις 1.2.1. Επιπλέον αν, $(R, +, \cdot)$ είναι οποιοσδήποτε μοναδιαίος δακτύλιος,

$$\forall f(x), g(x) \in R[x], \deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

1.3 Ιδεώδη και Περιοχές κυρίων Ιδεωδών

Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος και $I \subseteq R$ ένα υποσύνολό του. Υπενθυμίζουμε ότι

Ορισμός 1.3.1. Το $I \subseteq R$ είναι ένα *ιδεώδες* τού $(R, +, \cdot)$ αν, το ζεύγος $(I, +)$ είναι μια υποομάδα τού $(R, +)$ και το I είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με τα στοιχεία τού R, δηλαδή $\forall a \in I$ και $r \in R$, το στοιχείο ra ανήκει στο I.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος. «Αλγεβρικές Δομές ΙΙ. Ο Δακτύλιος Πολυωνύμων μιας Μεταβλητής». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1299.

Σημείωμα Αδειοδότησης