ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Ενότητα: Ομομορφισμοί και Πηλικοδάκτυλιοι

Διδάσκων: Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος

Τμήμα: Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιδιαιτέρως, αν τα $f(x), g(x)$ είναι σχετικώς πρώτα ως πολυώνυμα τού $F[x]$, δηλαδή Μ.Κ.Δ.$(f(x), g(x))= 1$, τότε Μ.Κ.Δ.$(f(x), g(x))= 1$ και ως πολυώνυμα τού $K[x]$, όπου K υπέρσωμα τού F.

1.4 Ομομορφισμοί και Πηλικοδάκτυλιοι

Ομομορφισμοί

Έστω R και S δύο μοναδιαίοι μεταθετικοί δακτύλιοι. Υπενθυμίζουμε ότι

Ορισμός 1.4.1. Ένας *ομομορφισμός δακτυλίων* από τον δακτύλιο R στον δακτύλιο S είναι μια απεικόνιση $\phi : R \to S$ που ικανοποιεί τα

(α′) $\forall a, b \in R, \phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$,

(β′) $\forall a, b \in R, \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$,

(γ′) $\phi(1_R) = 1_S$.

Ονομάζουμε *πυρήνα* τού ομομορφισμού $\phi : R \to S$, το σύνολο

$$\mathrm{Ker}\phi = \{r \in R \mid \phi(r) = 0_S\}.$$

Γνωρίζουμε ότι

Λήμμα 1.4.1. *Ο πυρήνας* $\mathrm{Ker}\phi$ *οποιουδήποτε ομομορφισμού* $\phi : R \to S$ *είναι ένα ιδεώδες τού* R.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ομομορφισμός $\phi : R \to S$ ονομάζεται

(α′) *μονομορφισμός* αν, ο ομομορφισμός ϕ είναι μια «1-1» απεικόνιση,

(β′) *επιμορφισμός* αν, ο ομομορφισμός ϕ είναι μια «επί» απεικόνιση,

(γ′) *ισομορφισμός* αν, ο ομομορφισμός ϕ είναι μια «1-1» και «επί» απεικόνιση,

Είναι γνωστά τα εξής:

Λήμμα 1.4.2. (α′) *Ένας ομομορφισμός δακτυλίων* $\phi : R \to S$ *είναι μονομορφισμός, αν και μόνο αν,* $\mathrm{Ker}\phi = \{0_R\}$.

(β′) *Αν* $\phi : R \to S$ *είναι ένας ισομορφισμός,τότε και η αντίστροφη απεικόνιση* $\phi^{-1} : S \to R, s \mapsto \phi^{-1}(s) = r$ *όταν* $\phi(r) = s$, *είναι επίσης ένας ισομορφισμός δακτυλίων.*

Πηλικοδάκτυλιοι

Έστω I ένας ιδεώδες ενός μεταθετικού μοναδιαίου δακτυλίου R. Θεωρούμε το σύνολο $R/I = \{a + I \mid a \in \}$ των αριστερών πλευρικών κλασεων τής I εντός τής R. Κατόπιν, θεωρούμε την πηλικοομάδα $(R/I, +)$ τής αβελιανής ομάδας R και την αντιστοιχία
$$\cdot : R/I \times R/I \mapsto R/I, (a_I, b + I) \mapsto ab + I.$$

Η «·» είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση και η τριάδα $(R/I, +, \cdot)$ αποτελεί έναν μεταθετικό δακτύλιο με ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση το $0_R + I$ και μοναδιαίο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό το $0_R + I$.

Ο δακτύλιος $(R/I, +, \cdot)$ ονομάζεται ο *πηλικοδακτύλιος* τού R ως προς το ιδεώδες I.

Είναι γνωστό ότι

Λήμμα 1.4.3. (α′) *Η απεικόνιση $\pi_I : R \to R/I, r \mapsto \pi_I(r) := r + I$ είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων με $\mathrm{Ker}\pi_I = I$.*

(β′) *Αν $\mathcal{L}$ είναι το σύνολο των ιδεωδών τού R/I και $\mathcal{K}$ είναι το σύνολο των ιδεωδών J τού R που περιέχουν το I, δηλαδή με $J \supseteq I$, τότε η αντιστοιχία*
$$\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}, \quad J \quad \mapsto \quad J/I := \{j + I \mid j \in J\}$$
αποτελεί μια «1-1» και «επί» απεικόνιση.

Δηλαδή, κάθε ιδεώδες M τού R/I είναι τής μορφής $M = J/I$, όπου J ιδεώδες τού R με $I \subseteq J$.

Συνήθως, ο επιμορφισμός $\pi_I : R \to R/I$ ονομάζεται ο *κανονικός επιμορφισμός*.

Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού Δακτυλίων

Θεώρημα 1.4.1. *Αν $\phi : R \to S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων και I είναι ένα ιδεώδες τού R με $I \subseteq \mathrm{Ker}\phi$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\overline{\phi} : R/I \to S$ με $\overline{\phi} \circ \pi_I = \phi$.*
Επιπλέον, (α′) $\mathrm{Ker}\overline{\phi} = \mathrm{Ker}\phi/I$ και (β′) ο $\overline{\phi}$ είναι επιμορφισμός, αν και μόνο αν, ο ϕ είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. (*Περιγραφή*) Αποδεικνύεται ότι η αντιστοιχία
$$\overline{\phi} : R/I \to S, r + I \mapsto \overline{\phi}(r + I) := \phi(r)$$
είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός δακτυλίων επειδή $I \subseteq \mathrm{Ker}\phi$. Τώρα, $\forall r \in R$ είναι $\overline{\phi} \circ \pi_I(r) = \overline{\phi}(r+I) = \phi(r)$ και επομένως $\overline{\phi} \circ \pi_I = \phi$. Αν $\psi : R/I \to S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων με $\psi \circ \pi_I = \phi$, τότε $\psi \circ \pi_I = \overline{\phi} \circ \pi_I$ και γι' αυτό
$$\forall r + I \in R/I, \psi(r + I) = \psi \circ \pi_I(r) = \overline{\phi} \circ \pi_I(r) = \overline{\phi}(r + I).$$

Συνεπώς, $\psi = \overline{\phi}$.

(α') Έχουμε:

$$r + I \in \mathrm{Ker}\overline{\phi} \Leftrightarrow \overline{\phi}(r + I) = 0_S \Leftrightarrow \phi r = 0_S \Leftrightarrow r \in \mathrm{Ker}\phi.$$

Ώστε, $\mathrm{Ker}\overline{\phi} = \mathrm{Ker}\phi/I$.

(β') Αν ο $\overline{\phi}$ είναι επιμορφισμός, τότε είναι και ο ϕ ένας επιμορφισμός, αφού ισούται με τη σύνθεση τού $\overline{\phi}$ με τον επιμορφισμό π_I. Αντίστροφα, αν ο $\pi_I(r) = \overline{\phi} \circ \pi_I$ είναι ένας επιμορφισμός, τότε είναι επιμορφισμός και ο $\overline{\phi}$, αφού γενικά αν μια σύνθεση $\alpha \circ \beta$ δύο απεικονίσεων είναι «επί», τότε και η α είναι «επί». $\square$

Παρατηρήσεις 1.4.1. (α') Τη συγκεκριμένη ιδιότητα τού $\overline{\phi}$ στο Θεώρημα 1.4.1, τη δηλώνουμε λέγοντας ότι ο $\overline{\phi}$ συμπληρώνει το διάγραμμα
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & R/I \\ & C \end{tikzcd}$$
στο μεταθετικό διάγραμμα
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & R/I \\ & C \arrow[u, dashed, "\exists!\overline{\phi}"'] \end{tikzcd}$$

(β') Στο προηγούμενο Θεώρημα 1.4.1 επιλέγοντας ως I τον ίδιο τον πυρήνα $\mathrm{Ker}\phi$ διαπιστώνουμε ότι ο επαγόμενος ομομορφισμός $\overline{\phi} : R/I \to S$ είναι ένας μονομορφισμός, αφού έχει ως πυρήνα το $\mathrm{Ker}\phi/\mathrm{Ker}\phi$.

(γ') Τέλος, δοθέντος τού ομομορφισμού $\phi : R \to S$, θεωρούμε τον επαγόμενο επιμορφισμό δακτυλίων $\phi' : R \to \phi(R), r \mapsto \phi(r)$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}\phi' = \mathrm{Ker}\phi$. Έτσι, επιλέγοντας ως $I = \mathrm{Ker}\phi'$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.4.1 στον ομομορφισμό ϕ' έχουμε ότι ο δακτύλιος $R/\mathrm{Ker}\phi$ είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\phi(R)$.

1.5 Πρώτα και μεγιστοτικά Ιδεώδη

Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος και $I \subsetneq R$ ένα *γνήσιο* ιδεώδες τού R.

Ορισμός 1.5.1. Το γνήσιο ιδεώδες I τού R ονομάζεται *πρώτο* αν, $\forall a, b \in R$ με $ab \in I$ έπεται είτε $a \in I$ είτε $b \in I$.
Το γνήσιο ιδεώδες I τού R ονομάζεται *μεγιστοτικό* αν, για κάθε ιδεώδες J τού R με $I \subseteq J$ έπεται ή $I = J$ ή $J = R$.

Υπενθυμίζουμε την πολύ σημαντική

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος. «Αλγεβρικές Δομές ΙΙ. Ομομορφισμοί και Πηλικοδάκτυλιοι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1299.

Σημείωμα Αδειοδότησης