ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές ΙΙ

Ενότητα: Πρώτα και μεγιστοτικά Ιδεώδη

Διδάσκων: Καθηγητής Μαρμαρίδης Νικόλαος - Θεοδόσιος

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συνεπώς, $\psi = \overline{\phi}$.

(α') Έχουμε:

$$r + I \in \mathrm{Ker}\overline{\phi} \Leftrightarrow \overline{\phi}(r+I) = 0_S \Leftrightarrow \phi r = 0_S \Leftrightarrow r \in \mathrm{Ker}\phi.$$

Ώστε, $\mathrm{Ker}\overline{\phi} = \mathrm{Ker}\phi/I$.

(β') Αν ο $\overline{\phi}$ είναι επιμορφισμός, τότε είναι και ο ϕ ένας επιμορφισμός, αφού ισούται με τη σύνθεση τού $\overline{\phi}$ με τον επιμορφισμό π_I. Αντίστροφα, αν ο $\pi_I(r) = \overline{\phi} \circ \pi_I$ είναι ένας επιμορφισμός, τότε είναι επιμορφισμός και ο $\overline{\phi}$, αφού γενικά αν μια σύνθεση $\alpha \circ \beta$ δύο απεικονίσεων είναι «επί», τότε και η α είναι «επί». $\square$

Παρατηρήσεις 1.4.1. (α′) Τη συγκεκριμένη ιδιότητα τού $\overline{\phi}$ στο Θεώρημα 1.4.1, τη δηλώνουμε λέγοντας ότι ο $\overline{\phi}$ συμπληρώνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & R/I \\ & C \end{tikzcd}$$

στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & R/I \\ & C \arrow[u, dashed, "\exists!\overline{\phi}"'] \end{tikzcd}$$

(β′) Στο προηγούμενο Θεώρημα 1.4.1 επιλέγοντας ως I τον ίδιο τον πυρήνα $\mathrm{Ker}\phi$ διαπιστώνουμε ότι ο επαγόμενος ομομορφισμός $\overline{\phi} : R/I \to S$ είναι ένας μονομορφισμός, αφού έχει ως πυρήνα το $\mathrm{Ker}\phi/\mathrm{Ker}\phi$.

(γ′) Τέλος, δοθέντος τού ομομορφισμού $\phi : R \to S$, θεωρούμε τον επαγόμενο επιμορφισμό δακτυλίων $\phi' : R \to \phi(R), r \mapsto \phi(r)$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}\phi' = \mathrm{Ker}\phi$. Έτσι, επιλέγοντας ως $I = \mathrm{Ker}\phi'$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.4.1 στον ομομορφισμό ϕ' έχουμε ότι ο δακτύλιος $R/\mathrm{Ker}\phi$ είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $\phi(R)$.

1.5 Πρώτα και μεγιστοτικά Ιδεώδη

Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος και $I \subsetneq R$ ένα *γνήσιο* ιδεώδες τού R.

Ορισμός 1.5.1. Το γνήσιο ιδεώδες I τού R ονομάζεται *πρώτο* αν, $\forall a, b \in R$ με $ab \in I$ έπεται είτε $a \in I$ είτε $b \in I$.
Το γνήσιο ιδεώδες I τού R ονομάζεται *μεγιστοτικό* αν, για κάθε ιδεώδες J τού R με $I \subseteq J$ έπεται ή $I = J$ ή $J = R$.

Υπενθυμίζουμε την πολύ σημαντική

Πρόταση 1.5.1. *Ένα γνήσιο ιδεώδες* I *τού* R *είναι πρώτο αν, και μόνο αν, ο πηλικοδακτύλιος* R/I *είναι ακέραια περιοχή.*
Ένα γνήσιο ιδεώδες I *τού* R *είναι μεγιστοτικό αν, και μόνο αν, ο πηλικοδακτύλιος* R/I *είναι σώμα.*

Παραδείγματα 1.5.1. Τα πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ είναι τα $\langle a \rangle, a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, όπου ο a ισούται με 0 ή με κάποιον πρώτο αριθμό.
Τα μεγιστοτικά ιδεώδη του δακτυλίου των ακεραίων αριθμών είναι τα $\langle a \rangle, a \in \mathbb{N}$, όπου ο a ισούται με κάποιον πρώτο αριθμό.

Παρατηρούμε ότι λόγω τής Πρότασης 1.5.1, κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες είναι πρώτο, αφού κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή. Ωστόσο το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε αληθές.
Στον δακτύλιο πολυωνύμων $\mathbb{Z}[x]$ το ιδεώδες $\langle x \rangle$ είναι πρώτο, αλλά δεν είναι μεγιστοτικό, αφού ο πηλικοδακτύλιος $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle$, ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, είναι ακέραια περιοχή αλλά δεν είναι σώμα.
Ωστόσο, σε μια Π.Κ.Ι. όπως είναι ο $F[x]$, όπου το F είναι σώμα ισχύει και το αντίστροφο για κάθε μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες.

Θεώρημα 1.5.1. *Σε μια περιοχή κυρίων ιδεωδών* R *κάθε μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες είναι μεγιστοτικό.*

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης