Φυλλάδιο Ασκήσεων 1, Θεωρία Galois 18-02-2013

Α 1. Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος και

(α΄) $\mathcal{F} = (R_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποδακτυλίων του.
Να δειχθεί ότι η η τομή $\bigcap_{i\in I} R_i$ είναι ένας υποδακτύλιος τού R.

(β΄) $\mathcal{L} = (J_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ιδεωδών του.
Να δειχθεί ότι η η τομή $\bigcap_{i\in I} J_i$ είναι ένα ιδεώδες τού R.

(γ΄) Έστω A ένα οποιοδήποτε υποσύνολο τού R και $\mathcal{L}_A = (J_i)_{i\in I}$ η οικογένεια ιδεωδών τού R που αποτελείται από τα ιδεώδη J_i τού R με $A \subseteq J_i$.
Να δειχθεί ότι το ιδεώδες $\bigcap_{i\in I} J_i$ είναι το «μικρότερο ιδεώδες» (ως προς τη σχέση υποσυνόλου «$\subseteq$») που περιέχει το σύνολο A.

Το συγκεκριμένο ιδεώδες ονομάζεται το ιδεώδες που *παράγεται από το σύνολο* A και παριστάνεται με $\langle A\rangle$. Το σύνολο A ονομάζεται *σύνολο γεννητόρων* τού ιδεώδους .

Α 2. Να δειχθεί ότι κάθε ιδεώδες I ενός δακτυλίου $(R,+,\cdot)$ διαθέτει ένα σύνολο γεννητόρων.

Α 3. Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος και A ένα μη κενό υποσύνολό του. Να δειχθεί ότι το ιδεώδες $\langle A\rangle$ που παράγεται από το A ισούται με το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mid n\in\mathbb{N}, r_i\in R, a_i\in A\right\}.$$

Ένα ιδεώδες I ενός δακτυλίου $(R,+,\cdot)$ ονομάζεται *κύριο*, αν υπάρχει ένα μονοσύνολο $A = \{a\} \subset R$ με $\langle A\rangle = I$. Συνήθως, ένα κύριο ιδεώδες I συμβολίζεται απλώς με $I = \langle a\rangle$, όπου $a\in R$.

Α 4. (α΄) Να δειχθεί ότι οποιοδήποτε ιδεώδες I τού δακτυλίου $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ είναι κύριο.

(β΄) Έστω $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{Z}$. Να προσδιοριστεί $a\in\mathbb{Z}$ με $\langle a\rangle = \langle X\rangle$.

Α 5. Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος και I, J δύο ιδεώδη τού R. Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$I + J = \{i + j \mid i\in I, j\in J\}$$

αποτελεί επίσης ιδεώδες τού R.

Α 6. Έστω $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{Z}$ αποτελούμενο από μη μηδενικούς αριθμούς. Να προσδιοριστεί $a \in \mathbb{Z}$ με

$$\langle z_1 \rangle + \langle z_2 \rangle + \cdots + \langle z_n \rangle = \langle a \rangle.$$

Α 7. Έστω $(F, +, \cdot)$ ένα σώμα και $(F_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσωμάτων του. Να δειχθεί ότι η η τομή $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι ένα υπόσωμα τού F.

Σύμφωνα με την προγούμενη άσκηση, η τομή $\mathcal{P}(F)$ **όλων** των υποσωμάτων ενός σώματος F είναι ένα υπόσωμα τού F (και μάλιστα το μικρότερο). Το $\mathcal{P}(F)$ ονομάζεται το *πρώτο υπόσωμα* τού F.
Στο μάθημα θα αποδειχθεί, και μάλιστα πολύ σύντομα, ότι το $\mathcal{P}(F)$ οποιουδήποτε σώματος F είναι ισόμορφο ή με το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ή με κάποιο σώμα $\mathbb{Z}_p$, (p πρώτος αριθμός).