Φυλλάδιο Ασκήσεων 2, Θεωρία Galois 25-02-2013

Α 1. Έστω ότι F είναι ένα σώμα, ότι $F[x]$ είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω τού F και ότι $F[x][y]$ είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω τού $F[x]$. Να εξεταστεί αν, ο $F[x][y]$ είναι Π.Κ.Ι..

Α 2. Έστω το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$.

(α΄) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[i]$ εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών αποτελεί μια ακέραια περιοχή. Πρόκειται για τον λεγόμενο *δακτύλιο των ακεραίων τού Gauss*.

(β΄) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha = a + bi \quad \mapsto N(\alpha) = a^2 + b^2$$

είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

(γ΄) Να δειχθεί ότι τα μοναδικά αντιστρέψιμα στοιχεία τού $\mathbb{Z}[i]$ είναι τα ± 1, $\pm i$.

(δ΄) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. Να δειχθεί ότι $\alpha \mid \beta \Rightarrow N(\alpha) \mid N(\beta)$. Διόρθωση!

(ε΄) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν $\gamma, \rho \in \mathbb{Z}[i]$ με $\alpha = \beta\gamma + \rho$ και $N(\rho) < N(\beta)$. (*Από αυτό δεν θέλω απόδειξη.*)

(στ΄) Να δειχθεί ότι ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι Π.Κ.Ι..

(Για τον δακτύλιο ακεραίων τού Gauss
βλ. `http://www.math.uconn.edu/ kconrad/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf`)

Α 3. Να δειχθεί ότι το λεγόμενο «διωνυμικό θεώρημα» ισχύει σε οποιονδήποτε μεταθετικό μοναδιαίο δακτύλιο $(R, +, \cdot)$:
Αν $n \geq 1$, τότε

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

όπου $\binom{n}{i}$ παριστά τον διωνυμικό συντελεστή $\frac{n!}{i!(n-i)!}$.
(Υπόδειξη: *Αποδείξτε πρώτα ότι* $\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i}$.)

Α 4. Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι ο p είναι διαιρέτης τού $\binom{p}{i}$, όταν $i \neq 0$ και $i \neq p$.
(*Προσέξτε ότι ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής στην περίπτωση, όπου ο* p *δεν είναι πρώτος αριθμός. Επί παραδείγματι, ούτε το* 4 *είναι διαιρέτης τού* $\binom{4}{2} = 6$, *ούτε το* 8 *είναι διαιρέτης του* $\binom{8}{4} = 70$.)

Α 5. Να δειχθεί ότι αν, η χαρακτηριστική τού $(R, +, \cdot)$ είναι ένας πρώτος αριθμός p, τότε

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

Α 6. Έστω ότι $(R, +, \cdot)$ είναι ένας μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος και ότι $(R[x], +, \cdot)$ είναι ο αντίστοιχος δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω τού R. Για κάθε σταθερώς επιλεγμένο στοιχείο $a \in R$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$e_a : R[x] \to R, \quad f(x) \quad \mapsto \quad e_a(f(x)) := f(a).$$

(α′) Να δειχθεί ότι η e_a αποτελεί έναν ομομορφισμό δακτυλίων.
(*Ο ομομορφισμός* e_a *ονομάζεται ο* ***ομομορφισμός αποτίμησης*** *των πολυωνύμων στο στοιχείο* $a \in R$.)

(β′) Να δειχθεί ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker} e_a$ αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα υπεράνω του R που διαθέτουν το a ως θέση μηδενισμού (ρίζα) και ότι συνεπώς ο $\mathrm{Ker} e_a$ ισούται με το κύριο ιδεώδες $\langle x-a \rangle$τού $R[x]$ που παράγεται από το πολυώνυμο $x - a$.

Α 7. Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και ότι $f(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_n x^n \in R[x]$. Ορίζουμε: την **παράγωγο** τού $f(x)$ ως

$$f'(x) = r_1 + 2r_2 x + \cdots + n r_n x^{n-1}.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \text{ και ότι } (f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Α 8. Έστω ότι F είναι ένα σώμα και ότι $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τού $F[x]$ που αναλύεται στο $F[x]$ σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων, δηλαδή ότι

$$f(x) = \prod (x - a_i) \in F[x] \text{ με } a_i \in F, \forall i.$$

Να δειχθεί ότι το $f(x)$ *δεν διαθέτει επαναλαμβανόμενες θέσεις μηδενισμού* (δηλαδή ότι το $f(x)$ δεν είναι ποτέ πολλαπλάσιο κάποιου $(x - a)^2$ με $a \in F$) αν, και μόνον αν, ο Μ.Κ.Δ.$(f(x), f'(x)) = 1$, όπου $f'(x)$ είναι η παράγωγος τού $f(x)$.

Α 9. Έστω ότι $(R, +, \cdot)$ είναι ένας μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος και ότι S είναι ένα σύνολο. Ας είναι R^S το σύνολο όλων των απεικονίσεων $S \to R$. Στο R^S ορίζονται οι πράξεις τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού σημείο προς σημείο· δηλαδή, αν $f, g : S \to R$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση

$$f + g : s \mapsto f(s) + g(s)$$

και την απεικόνιση

$$fg : s \mapsto f(s)g(s).$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο R^S εφοδιασμένο με τις δύο προηγούμενες πράξεις είναι ένας μεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος.