Φυλλάδιο Ασκήσεων 3, Θεωρία Galois 04-03-2013

Α 1. Έστω ότι F είναι ένα σώμα και ότι R είναι ο υποδακτύλιος τού $F[x]$ που αποτελείται από τα πολυώνυμα χωρίς γραμμικό όρο, δηλαδή $f(x) \in R$ αν, και μόνον αν,

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_nx^n.$$

Να δειχθεί ότι τα x^5 και x^6 δεν διαθέτουν Μ.Κ.Δ. παρατηρώντας ότι οι μονοστοί διαιρέτες τους είναι οι $1, x^2$ και x^3 και ότι κανένας δεν διαιρείται από τους άλλους δύο εντός τού R.
Να συμπεράνετε ότι υπάρχουν ακέραιες περιοχές R που περιέχουν ζεύγη στοιχείων, τα οποία δεν διαθέτουν Μ.Κ.Δ..

Α 2. Να δειχθεί ότι στον δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[x]$ δεν υπάρχουν πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, τέτοια ώστε $1 = xf(x) + 2g(x)$, μολονότι οι μόνοι κοινοί διαιρέτες των x και 2 είναι οι ± 1.

Α 3. Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Αν ο ρητός $r/s \in \mathbb{Q}$ είναι θέση μηδενισμού τού $f(x)$ και οι r, s είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι $r \mid a_0$ και $s \mid a_n$. Κατόπιν να συμπεράνετε ότι κάθε ρητή θέση μηδενισμού ενός μονοστού πολυωνύμου τού $\mathbb{Z}[x]$ οφείλει να είναι ακέραιος αριθμός.

Α 4. Ποια από τα επόμενα πολυώνυμα παραγοντοποιούνται στον $\mathbb{Q}[x]$;

(α΄) $3x^2 - 7x - 5$,

(β΄) $6x^3 - 3x - 18$,

(γ΄) $x^3 - 7x + 1$,

(δ΄) $x^3 - 9x - 9$.

Α 5. Έστω F ένα σώμα. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in F[x]$ είναι ανάγωγο, αν και μόνο, αν το πολυώνυμο $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n \in F[x]$ είναι ανάγωγο.

Α 6. Να δειχθεί ότι το $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$.
(Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι το $f(x)$ δεν διαθέτει ρητές θέσεις μηδενισμού και κατόπιν αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ρητοί a, b και c με

$$x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c).)$$

Α 7. Έστω R ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος.

(α΄) Αν $a, b \in R$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\psi_{a,b} : R[x] \to R[x]$ με $\psi_{a,b}(r) = r, \forall r \in R$ και $\psi_{a,b}(x) = ax + b$.

(β΄) Αν $c, d \in R$, να προσδιοριστεί η σύνθεση $\psi_{a,b} \circ \psi_{c,d}$.

(γ΄) Αν το $a \in R$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο, να δειχθεί ότι ο $\psi_{a,b}$ είναι ένας ισομορφισμός.

(δ΄) Έστω ότι ο $R = F$ είναι ένα σώμα και $a, b \in F$ με $a \neq 0_F$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Αν $f(x) \in F[x]$, τότε $\deg f(x) = \deg \psi_{a,b}(f(x))$.

(ii) Το πολυώνυμο $p(x) \in F[x]$ είναι ανάγωγο αν, και μόνο αν, το πολυώνυμο $\psi_{a,b}(p(x))$ είναι ανάγωγο.

Α 8. (α΄) Στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$ να εκτελεστεί η διαίρεση με υπόλοιπο τού πολυωνύμου $f(x) = 6x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ δια τού $g(x) = 2x^3 + x + 3$.

(β΄) Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$ να εκτελεστεί η διαίρεση με υπόλοιπο τού πολυωνύμου $f(x) = [2]_3x^3 + [2]_3x^2 + x + [1]_3$ δια τού $g(x) = [2]_3x^3 + [2]_3x$

Α 9. Έστω ότι p είναι ένας πρώτος αριθμός και $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ένα πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}[x]$ με $p \nmid a_n$.
Συμβολίζουμε με $\overline{f(x)}$ το πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_p[x]$ που προκύπτει από το $f(x)$ κατόπιν αναγωγής των συντελεστών τού $f(x)$ κατά $\mathrm{mod} p$, δηλαδή $\overline{f(x)} = [a_0]_p + [a_1]_px + \cdots + [a_n]_px^n$.

Να δειχθεί ότι αν, το $\overline{f(x)}$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_p[x]$, τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$.

Ποια από τα επόμενα πολυώνυμα είναι ανάγωγα πολυώνυμα τού $\mathbb{Q}[x]$;

$$x^3 - x + 1, \quad x^3 + 2x + 1, \quad x^3 + x - 1, \quad x^5 - x + 1, \quad x^5 + x + 1, \quad 5x^3 + x^2 - 10x - 2.$$