ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

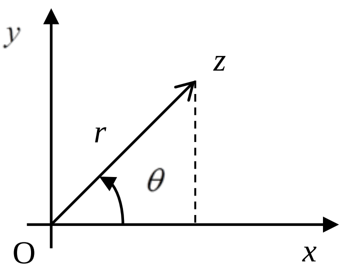
ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΑΧΘΕΙΣΑΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ)

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Το μιγαδικό επίπεδο

Στο μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ αντιστοιχούμε το σημείο (x, y) ενός καρτεσιανού επιπέδου. Η απεικόνιση αυτή είναι 1-προς-1. Ο άξονας των τετμημένων (άξονας των x) λέγεται *πραγματικός άξονας* ενώ ο άξονας των τεταγμένων (άξονας των y) λέγεται *φανταστικός άξονας*. Το καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία έχουν αντιστοιχισθεί με αυτό τον τρόπο με τους μιγαδικούς αριθμούς το λέμε *μιγαδικό επίπεδο*. Όταν λέμε «το σημείο z» εννοούμε το σημείο του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό z. Αν στο μιγαδικό επίπεδο εισάγουμε πολικές συντεταγμένες (r,θ) τότε κάθε μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ γράφεται στην λεγόμενη *πολική* ή *τριγωνομετρική μορφή* του ως εξής:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ . \qquad \textbf{(1.1)}$$

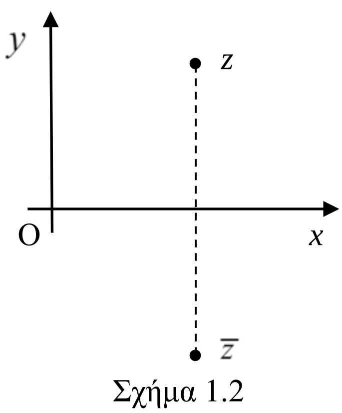


Σχήμα 1.1

Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού

Ο *συζυγής* $\overline{z}$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται ως εξής:

$$\overline{z} = x - iy\,. \qquad \textbf{(1.2)}$$



Σχήμα 1.2

Στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο $\overline{z}$ προκύπτει από το z με ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα. (Σχήμα 1.2)

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού

Το *μέτρο* $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται ως εξής:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ . \qquad \textbf{(1.3)}$$

Στο μιγαδικό επίπεδο το μέτρο του z δεν είναι τίποτα άλλο παρά η απόσταση r του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 1.1). Οι βασικές ιδιότητες του μέτρου είναι γνωστές από τα λυκειακά μαθηματικά. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι *τριγωνικές ανισότητες*:

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad \textbf{(1.4)}$$

όπου z_1 και z_2 είναι δύο τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί.

Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού

Το *όρισμα* $\arg z$ ενός μη-μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι μια πλειότιμη συνάρτηση του z που ορίζεται ως εξής:

$$\theta \equiv \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{με } z \neq 0 \ , \qquad \textbf{(1.5)}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα από την αρχή Ο προς το σημείο z (Σχήμα 1.1). Δύο τυχόντα από τα άπειρα ορίσματα ενός και του αυτού μιγαδικού αριθμού z διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού 2π. Ως *κύρια τιμή του ορίσματος* του z ορίζεται η γωνία $\Theta \equiv \mathrm{Arg} z$ για την οποία $-\pi < \Theta \le \pi$. Κάθε μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός z γράφεται με την βοήθεια του ορίσματος και του μέτρου του $|z| \equiv r$ στην πολική μορφή του (1.1).

2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

Με τους ορισμούς που ακολουθούν εισάγουμε μερικές απλές τοπολογικές έννοιες στο μιγαδικό επίπεδο που θα μας είναι χρήσιμες στην συνέχεια.

Γειτονιά ενός σημείου.

Η *γειτονιά* ενός σημείου z_0 ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων z τέτοιων ώστε $|z - z_0| < \varepsilon$ όπου ε είναι ένας τυχόντας θετικός αριθμός. Είναι σαφές ότι η γειτονιά του z_0 αναπαρίσταται από τα σημεία ενός δίσκου με κέντρο στο z_0 και ακτίνα ε από τον οποίο έχουν αφαιρεθεί τα σημεία της περιφέρειάς του.

Τρύπια γειτονιά ενός σημείου.

Η *τρύπια γειτονιά* ενός σημείου z_0 ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων z τέτοιων ώστε $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Δηλαδή η τρύπια γειτονιά είναι μια γειτονιά από την οποία έχει αφαιρεθεί το κέντρο της.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος. «Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αδειοδότησης