ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού

Το *μέτρο* $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται ως εξής:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \tag{1.3}$$

Στο μιγαδικό επίπεδο το μέτρο του z δεν είναι τίποτα άλλο παρά η απόσταση r του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 1.1). Οι βασικές ιδιότητες του μέτρου είναι γνωστές από τα λυκειακά μαθηματικά. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι *τριγωνικές ανισότητες*:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{1.4}$$

όπου z_1 και z_2 είναι δύο τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί.

Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού

Το *όρισμα* $\arg z$ ενός μη-μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι μια πλειότιμη συνάρτηση του z που ορίζεται ως εξής:

$$\theta \equiv \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) , \quad \text{με } z \ne 0 \ , \tag{1.5}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα από την αρχή O προς το σημείο z (Σχήμα 1.1). Δύο τυχόντα από τα άπειρα ορίσματα ενός και του αυτού μιγαδικού αριθμού z διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού 2π. Ως *κύρια τιμή του ορίσματος* του z ορίζεται η γωνία $\Theta \equiv \mathrm{Arg}z$ για την οποία $-\pi < \Theta \le \pi$. Κάθε μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός z γράφεται με την βοήθεια του ορίσματος και του μέτρου του $|z| \equiv r$ στην πολική μορφή του (1.1).

2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

Με τους ορισμούς που ακολουθούν εισάγουμε μερικές απλές τοπολογικές έννοιες στο μιγαδικό επίπεδο που θα μας είναι χρήσιμες στην συνέχεια.

Γειτονιά ενός σημείου.

Η *γειτονιά* ενός σημείου z_0 ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων z τέτοιων ώστε $|z - z_0| < \varepsilon$ όπου ε είναι ένας τυχόντας θετικός αριθμός. Είναι σαφές ότι η γειτονιά του z_0 αναπαρίσταται από τα σημεία ενός δίσκου με κέντρο στο z_0 και ακτίνα ε από τον οποίο έχουν αφαιρεθεί τα σημεία της περιφέρειάς του.

Τρύπια γειτονιά ενός σημείου.

Η *τρύπια γειτονιά* ενός σημείου z_0 ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων z τέτοιων ώστε $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Δηλαδή η τρύπια γειτονιά είναι μια γειτονιά από την οποία έχει αφαιρεθεί το κέντρο της.

Εσωτερικό σημείο συνόλου.

Το σημείο z_0 λέγεται *εσωτερικό σημείο* του συνόλου S αν υπάρχει γειτονιά του z_0 που όλα της τα σημεία ανήκουν στο S.

Εξωτερικό σημείο συνόλου.

Το σημείο z_0 λέγεται *εξωτερικό σημείο* του συνόλου S αν υπάρχει γειτονιά του z_0 που δεν περιέχει σημεία του S.

Συνοριακό σημείο συνόλου.

Το σημείο z_0 λέγεται *συνοριακό σημείο* του συνόλου S αν δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του S.

Σύνορο συνόλου.

Το *σύνορο* ενός συνόλου είναι το σύνολο των συνοριακών του σημείων.

Ανοικτό σύνολο.

Ένα σύνολο λέγεται *ανοικτό* αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

Κλειστό σύνολο.

Ένα σύνολο λέγεται *κλειστό* αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Συνεκτικό σύνολο.

Ένα σύνολο λέγεται *συνεκτικό* αν κάθε ζευγάρι σημείων του μπορεί να ενωθεί με μια πολυγωνική γραμμή πεπερασμένου πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων η οποία να κείται εξ' ολοκλήρου μέσα στο σύνολο.

Απλά συνεκτικό σύνολο.

Ένα σύνολο λέγεται *απλά συνεκτικό* (ή σύνολο απλής συνοχής) αν είναι συνεκτικό και επί πλέον κάθε κλειστή καμπύλη που ανήκει στο σύνολο μπορεί να συρρικνωθεί με συνεχή τρόπο παραμένοντας μέσα στο σύνολο μέχρι να γίνει ένα σημείο. Ποιο παραστατικά, ένα απλά συνεκτικό σύνολο δεν έχει στο εσωτερικό του τρύπες.

Χωρίο.

Κάθε ανοικτό συνεκτικό σύνολο λέγεται *χωρίο*.

Περιοχή.

Κάθε χωρίο μαζί με όλα, μερικά, ή και κανένα από τα συνοριακά του σημεία θα λέγεται *περιοχή*.

Φραγμένο σύνολο.

Ένα σύνολο λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει περιφέρεια $|z| = R$ πεπερασμένης ακτίνας R η οποία να το περικλείει εξ' ολοκλήρου.

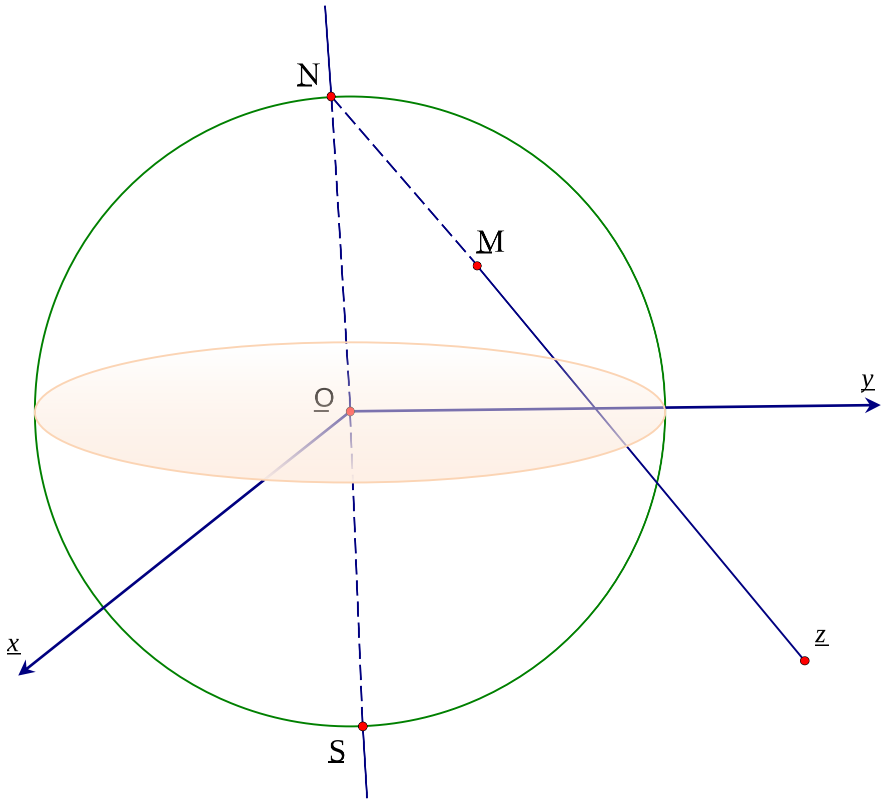
Το σημείο ∞.

Με την βοήθεια της λεγόμενης *στερεογραφικής προβολής* μπορούμε να θέσουμε σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου με τα σημεία της επιφάνειας μιας σφαίρας. Η αντιστοίχηση αυτή γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο (Σχήμα 2.1). Θεωρούμε μια μοναδιαία σφαίρα της οποίας το κέντρο το τοποθετούμε στην αρχή των αξόνων O (σημείο $z=0$) του μιγαδικού επιπέδου. Η κάθετος προς το μιγαδικό επίπεδο στο σημείο O καθορίζει επί της σφαίρας δύο σημεία: τον βόρειο πόλο N και τον νότιο πόλο S. Τώρα, κάθε ημιευθεία από το N που τέμνει την σφαίρα σε ένα σημείο M θα τέμνει το μιγαδικό επίπεδο σε ένα σημείο z και επομένως θέτει τα δύο αυτά σημεία σε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Η έτσι ορισμένη στερεογραφική προβολή αντιστοιχίζει τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου με τα σημεία της σφαίρας ως εξής:

«Σημεία του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$» $\leftrightarrow$ «Σημεία του ισημερινού της σφαίρας»

«Σημεία με $|z|<1$» $\leftrightarrow$ «Σημεία του νότιου ημισφαίριου» (Ειδικότερα, στο $\mathrm{O}\leftrightarrow\mathrm{S}$)

«Σημεία με $|z|>1$» $\leftrightarrow$ «Σημεία του βόρειου ημισφαίριου».



Σχήμα 2.1

Το μόνο σημείο επί της σφαίρας που δεν έχουμε ακόμα αντιστοιχήσει με κάποιο σημείο του μιγαδικού επιπέδου είναι ο βόρειος πόλος N. Επειδή μια ημιευθεία από το N που τέμνει την σφαίρα μόνο στο N αναγκαστικά εφάπτεται σε αυτήν και επομένως είναι παράλληλη προς το μιγαδικό επίπεδο, είναι προφανές ότι θα τέμνει το μιγαδικό επίπεδο σε ένα σημείο z του οποίου η απόσταση από το O θα είναι άπειρη (δηλαδή

$|z| = +\infty$) . Το σημείο αυτό λέγεται το *επ' άπειρον σημείο* και συμβολίζεται με το σύμβολο ∞. Έτσι, με την αντιστοιχία $\infty \leftrightarrow N$ καλύψαμε όλα τα σημεία της σφαίρας.

Από τοπολογική άποψη θεωρούμε ότι το μιγαδικό επίπεδο μαζί με το σημείο ∞ είναι κλειστό και το ονομάζουμε *επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο*. Αντίστοιχα, κλειστό θεωρείται και το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών όταν σε αυτό έχουμε συμπεριλάβει και τον μιγαδικό αριθμό ∞. Τα σημεία με $|z| > R$, όπου R είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός διάφορος του $+\infty$, λέμε ότι αποτελούν μια γειτονιά του σημείου ∞. Τονίζουμε με έμφαση ότι τα σημεία $+\infty$ και $-\infty$ της πραγματικής ευθείας είναι διαφορετικές μαθηματικές οντότητες από το σημείο ∞ και δεν πρέπει να συγχέονται με αυτό.

3. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΗΣΗΣ.

Η έννοια της συνάρτησης $f(z)$

Μια συνάρτηση f της μιγαδικής μεταβλητής z είναι μια απεικόνιση ενός υποσυνόλου S του $\mathbb{C}$ μέσα στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή,

$$S \ni z \xrightarrow{f} w \equiv f(z) \in f(S) \subseteq \mathbb{C}$$

Το σύνολο S λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f. Η εικόνα του S μέσω της f, η $f(S)$, λέγεται *πεδίο τιμών* της f και είναι εν γένει ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Το z είναι η *ανεξάρτητη μεταβλητή* της συνάρτησης και το w η *εξαρτημένη μεταβλητή* ή και *εικόνα* του z. Στην συνέχεια θα αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f γράφοντας αδιακρίτως «η συνάρτηση $w = f(z)$» ή «η συνάρτηση $f(z) = \ldots$» ή ακόμα ποιο απλά «η συνάρτηση $f(z)$». Αν στην $f(z)$ θέσουμε $z = x + iy$ τότε αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad \textbf{(3.1)}$$

όπου $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις των δύο ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών x και y. Γραφική παράσταση για τις μιγαδικές συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής δεν είναι εφικτή αφού δεν μπορούμε να έχουμε εποπτεία σε τέσσερις διαστάσεις (δύο για την ανεξάρτητη μεταβλητή και άλλες δύο για την εξαρτημένη). Η μόνος τρόπος για να έχουμε μια μερική εποπτεία των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης $f(z)$ είναι να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το ένα δίπλα στο άλλο τα μιγαδικά επίπεδα των μεταβλητών z και w (τα οποία θα ονομάζουμε στην συνέχεια *z*-επίπεδο και *w*-επίπεδο αντίστοιχα) και να δείξουμε πως απεικονίζεται μέσω της $f(z)$ ένα σύνολο σημείων του *z*-επιπέδου στο *w*-επίπεδο. Μελετώντας κατ' αυτό τον τρόπο μια συνάρτηση $f(z)$ την αντιμετωπίζουμε σαν ένα *σημειακό μετασχηματισμό* στο μιγαδικό επίπεδο.

Το όριο $\lim_{z \to z_0} f(z)$

Λέμε ότι *το όριο* της $f(z)$ καθώς το z τείνει προς το z_0 είναι το w_0 και γράφουμε

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος. «Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αδειοδότησης