ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΗΣΗΣ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

$|z| = +\infty$). Το σημείο αυτό λέγεται το *επ' άπειρον σημείο* και συμβολίζεται με το σύμβολο ∞. Έτσι, με την αντιστοιχία $\infty \leftrightarrow N$ καλύψαμε όλα τα σημεία της σφαίρας.

Από τοπολογική άποψη θεωρούμε ότι το μιγαδικό επίπεδο μαζί με το σημείο ∞ είναι κλειστό και το ονομάζουμε *επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο*. Αντίστοιχα, κλειστό θεωρείται και το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών όταν σε αυτό έχουμε συμπεριλάβει και τον μιγαδικό αριθμό ∞. Τα σημεία με $|z| > R$, όπου R είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός διάφορος του $+\infty$, λέμε ότι αποτελούν μια γειτονιά του σημείου ∞. Τονίζουμε με έμφαση ότι τα σημεία $+\infty$ και $-\infty$ της πραγματικής ευθείας είναι διαφορετικές μαθηματικές οντότητες από το σημείο ∞ και δεν πρέπει να συγχέονται με αυτό.

3. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΗΣΗΣ.

Η έννοια της συνάρτησης $f(z)$

Μια συνάρτηση f της μιγαδικής μεταβλητής z είναι μια απεικόνιση ενός υποσυνόλου S του $\mathbb{C}$ μέσα στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή,

$$S \ni z \xrightarrow{f} w \equiv f(z) \in f(S) \subseteq \mathbb{C}$$

Το σύνολο S λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f. Η εικόνα του S μέσω της f, η $f(S)$, λέγεται *πεδίο τιμών* της f και είναι εν γένει ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Το z είναι η *ανεξάρτητη μεταβλητή* της συνάρτησης και το w η *εξαρτημένη μεταβλητή* ή και *εικόνα* του z. Στην συνέχεια θα αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f γράφοντας αδιακρίτως «η συνάρτηση $w = f(z)$» ή «η συνάρτηση $f(z) = \ldots$» ή ακόμα ποιο απλά «η συνάρτηση $f(z)$». Αν στην $f(z)$ θέσουμε $z = x + iy$ τότε αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad \textbf{(3.1)}$$

όπου $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις των δύο ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών x και y. Γραφική παράσταση για τις μιγαδικές συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής δεν είναι εφικτή αφού δεν μπορούμε να έχουμε εποπτεία σε τέσσερις διαστάσεις (δύο για την ανεξάρτητη μεταβλητή και άλλες δύο για την εξαρτημένη). Η μόνος τρόπος για να έχουμε μια μερική εποπτεία των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης $f(z)$ είναι να σχεδιάσουμε ξεχωριστά το ένα δίπλα στο άλλο τα μιγαδικά επίπεδα των μεταβλητών z και w (τα οποία θα ονομάζουμε στην συνέχεια *z*-επίπεδο και *w*-επίπεδο αντίστοιχα) και να δείξουμε πως απεικονίζεται μέσω της $f(z)$ ένα σύνολο σημείων του *z*-επιπέδου στο *w*-επίπεδο. Μελετώντας κατ' αυτό τον τρόπο μια συνάρτηση $f(z)$ την αντιμετωπίζουμε σαν ένα *σημειακό μετασχηματισμό* στο μιγαδικό επίπεδο.

Το όριο $\lim_{z \to z_0} f(z)$

Λέμε ότι *το όριο* της $f(z)$ καθώς το z τείνει προς το z_0 είναι το w_0 και γράφουμε

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| f(z) - w_0 \right| < \varepsilon \quad \text{αν} \quad \left| z - z_0 \right| < \delta . \qquad \textbf{(3.2)}$$

Το όριο για να υπάρχει θα πρέπει να μην εξαρτάται από τον τρόπο που το z τείνει προς το z_0.

Συνέχεια συνάρτησης

Μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται *συνεχής* στο σημείο z_0 αν και μόνον αν υπάρχουν τα $\lim_{z\to z_0} f(z)$ και $f(z_0)$ και

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad \textbf{(3.3)}$$

Παράγωγος συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής

Η *παράγωγος* μιας συνάρτησης $f(z)$ σε ένα σημείο z_0 ορίζεται όπως και για τις συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής μέσω του τύπου

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} . \qquad \textbf{(3.4)}$$

Σημειώστε ότι για τον συμβολισμό της παραγώγου, εκτός από το σύμβολο f' χρησιμοποιείται ευρέως και ο συμβολισμός $\frac{df}{dz}$. Οι βασικοί τύποι παραγώγισης για το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων έχουν όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{df[g(z)]}{dz} = \dfrac{df[g(z)]}{dg(z)}\dfrac{dg(z)}{dz} \begin{array}{l} [f(z)+g(z)]' = f'(z)+g'(z) \\ [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z) \\ \left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad \text{αν } g(z)\neq 0 \end{array} \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Οι ανωτέρω τύποι μαζί με τον λεγόμενο κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης,

$$\frac{df[g(z)]}{dz} = \frac{df[g(z)]}{dg(z)}\frac{dg(z)}{dz} , \qquad \textbf{(3.6)}$$

μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε παραγώγους για μια πληθώρα συναρτήσεων στηριζόμενοι στους τύπους για την παράγωγο λίγων στοιχειωδών συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση που έχει παράγωγο στο σημείο z_0 είναι και συνεχής στο z_0.

Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

Ο ορισμός (3.4) για την παράγωγο είναι ο ίδιος με τον ορισμό της παραγώγου για τις συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. Όμως εδώ η ικανοποίησή του εισάγει ισχυρούς περιορισμούς για την συνάρτηση $f(z)$. Αυτό οφείλεται στο ότι το όριο στην (3.4) πρέπει να υπάρχει ανεξάρτητα από τον τρόπο που το z κινούμενο πάνω στο μιγαδικό επίπεδο προσεγγίζει το z_0. Οι περιορισμοί αυτοί φαίνονται παρακάτω όπου δίνουμε αναγκαίες αλλά ξέχωρα δίνουμε και ικανές συνθήκες ώστε σε ένα σημείο z_0 η $f(z)$ να δέχεται παράγωγο.

<u>*Αναγκαίες συνθήκες*</u>: *Αν η συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ έχει παράγωγο σε ένα σημείο $z_0=x_0+iy_0$ του μιγαδικού επιπέδου τότε οι πρώτες μερικές παράγωγοι u_x,u_y,v_x,v_y υπάρχουν στο σημείο (x_0,y_0) και επί πλέον ικανοποιούν εκεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann*:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} . \tag{3.7}$$

Επί πλέον η παράγωγος $f'(z_0)$ στο σημείο z_0 γράφεται:

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\,. \tag{3.8}$$

Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann μπορούν να γραφούν ισοδύναμα σε πολικές συντεταγμένες r,θ ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r}v_\theta \\ u_\theta &= -rv_r \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Μία άλλη ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων Cauchy-Riemann είναι η εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0\ . \tag{3.10}$$

<u>*Ικανές συνθήκες*</u>: *Αν η συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ είναι ορισμένη σε μια γειτονιά του σημείου $z_0=x_0+iy_0$ και σε αυτό το σημείο ικανοποιούνται τα εξής:*

1) *Οι πρώτες μερικές παράγωγοι u_x,u_y,v_x,v_y υπάρχουν και είναι συνεχείς.*
2) *Επαληθεύονται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann.*

τότε η παράγωγος της $f(z)$ υπάρχει στο σημείο z_0 και δίνεται από τον τύπο $f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$.

Η έννοια της αναλυτικής συνάρτησης

- *Μια συνάρτηση $f(z)$ θα λέγεται αναλυτική στο σημείο z_0 αν υπάρχει γειτονιά του z_0 σε όλα τα σημεία της οποίας η $f(z)$ να έχει παράγωγο.*

Μια συνάρτηση που είναι αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο θα λέγεται *ακεραία αναλυτική*. Τα πολυώνυμα $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ είναι ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις. Οι ρητές συναρτήσεις που είναι ανάγωγα πηλίκα πολυωνύμων είναι αναλυτικές συναρτήσεις στα σημεία που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής αλλά δεν είναι ακέραιες αναλυτικές αφού δεν είναι αναλυτικές στα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής. Οι συναρτήσεις e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ είναι ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις. Γενικότερα, το άθροισμα, το γινόμενο, και η σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση. Επίσης το πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική στα σημεία που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Μια έννοια πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές στην φυσική είναι η έννοια της *αρμονικής συνάρτησης* που ορίζεται ως εξής:

- *Μια πραγματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών θα λέγεται αρμονική σε κάποιο χωρίο του επιπέδου x,y αν σε αυτό το χωρίο έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.*

Έστω $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ μια συνάρτηση αναλυτική σε χωρίο D του μιγαδικού επιπέδου. Τότε το πραγματικό της μέρος $u(x,y)$ και το φανταστικό της μέρος $v(x,y)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις. Ειδικότερα, η $v(x,y)$ λέγεται *αρμονική συζυγής* της $u(x,y)$.

- *Αν μια συνάρτηση $u(x,y)$ είναι αρμονική σε ένα ειδικού τύπου χωρίο που λέγεται απλά συνεκτικό, τότε σε αυτό το χωρίο πάντα υπάρχει η αρμονική συζυγής της $v(x,y)$ η οποία ορίζεται μονοσήμαντα εκτός από μια αυθαίρετη προσθετική σταθερά.*
- *Το μέτρο $|f(z)|$ μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ ορισμένης σε κλειστή και φραγμένη περιοχή του μιγαδικού επιπέδου δεν μπορεί να λαμβάνει ακρότατο στο εσωτερικό αυτής της περιοχής.*

4. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η εκθετική συνάρτηση

Η *εκθετική συνάρτηση* e^z, ή $\exp(z)$ όπως εναλλακτικά συμβολίζεται, ορίζεται από την σχέση

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad \textbf{(4.1)}$$

όπου $z = x + iy$. Όταν $z = iy$ τότε ο ανωτέρω τύπος παίρνει την μορφή

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad \textbf{(4.2)}$$

και είναι γνωστός ως τύπος του Euler. Οι βασικές της ιδιότητες είναι οι ακόλουθες:

- *Μέτρο*: $|e^z| = e^x \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- *Εκθετική ιδιότητα*: $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος. «Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΗΣΗΣ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αδειοδότησης