ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

παρονομαστής αλλά δεν είναι ακέραιες αναλυτικές αφού δεν είναι αναλυτικές στα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής. Οι συναρτήσεις e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ είναι ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις. Γενικότερα, το άθροισμα, το γινόμενο, και η σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση. Επίσης το πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική στα σημεία που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Μια έννοια πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές στην φυσική είναι η έννοια της *αρμονικής συνάρτησης* που ορίζεται ως εξής:

- *Μια πραγματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών θα λέγεται αρμονική σε κάποιο χωρίο του επιπέδου x,y αν σε αυτό το χωρίο έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.*

Έστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ μια συνάρτηση αναλυτική σε χωρίο D του μιγαδικού επιπέδου. Τότε το πραγματικό της μέρος $u(x,y)$ και το φανταστικό της μέρος $v(x,y)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις. Ειδικότερα, η $v(x,y)$ λέγεται *αρμονική συζυγής* της $u(x,y)$.

- *Αν μια συνάρτηση $u(x,y)$ είναι αρμονική σε ένα ειδικού τύπου χωρίο που λέγεται απλά συνεκτικό, τότε σε αυτό το χωρίο πάντα υπάρχει η αρμονική συζυγής της $v(x,y)$ η οποία ορίζεται μονοσήμαντα εκτός από μια αυθαίρετη προσθετική σταθερά.*
- *Το μέτρο $|f(z)|$ μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ ορισμένης σε κλειστή και φραγμένη περιοχή του μιγαδικού επιπέδου δεν μπορεί να λαμβάνει ακρότατο στο εσωτερικό αυτής της περιοχής.*

4. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η εκθετική συνάρτηση

Η *εκθετική συνάρτηση* e^z, ή $\exp(z)$ όπως εναλλακτικά συμβολίζεται, ορίζεται από την σχέση

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad \textbf{(4.1)}$$

όπου $z = x+iy$. Όταν $z=iy$ τότε ο ανωτέρω τύπος παίρνει την μορφή

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad \textbf{(4.2)}$$

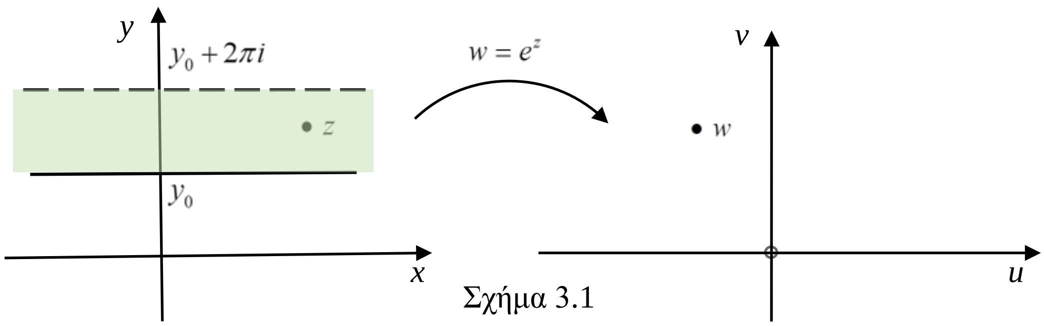
και είναι γνωστός ως τύπος του Euler. Οι βασικές της ιδιότητες είναι οι ακόλουθες:

- *Μέτρο*: $\left|e^z\right| = e^x \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- *Εκθετική ιδιότητα*: $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

$$\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}, \quad \text{όπου } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- *Παράγωγος*: $$\frac{de^{z}}{dz} = e^{z} \qquad \textbf{(4.3)}$$
- *Περιοδικότητα*: $e^{z+2\pi i} = e^{z} e^{2\pi i} = e^{z}$, δηλαδή φανταστική περίοδος $2\pi i$.
- *Η e^{z} ως απεικόνιση*: Η λουρίδα $y_0 \le y < y_0 + 2\pi i$ στο *z*-επίπεδο απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα στο *w*-επίπεδο από το οποίο έχει αφαιρεθεί το σημείο $w = 0$.



Σχήμα 3.1

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι *τριγωνομετρικές συναρτήσεις* μιας μιγαδικής μεταβλητής, οι $\cos z$, $\sin z$, $\tan z$, $\cot z$, ορίζονται μέσω της εκθετικής συνάρτησης από τους ακόλουθους τύπους

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \textbf{(4.4)}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = i - 2i \frac{1}{1 + e^{-2iz}} \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i + 2i \frac{1}{e^{2iz} - 1} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Δυνάμει του τύπου του Euler όταν η μεταβλητή z παίρνει πραγματικές τιμές οι ανωτέρω συναρτήσεις ταυτίζονται με τις γνωστές μας τριγωνομετρικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και ως εκ τούτου αποτελούν την γενίκευσή τους στο σύνολο $\mathbb{C}$. Όταν η μεταβλητή *z* παίρνει καθαρά φανταστικές τιμές είναι σαφές από τους ανωτέρω ορισμούς ότι οι $\sin z$, $\cos z$ (και επομένως και οι $\tan z$, $\cot z$) εκφράζονται άμεσα από τις αντίστοιχες πραγματικές υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sin(iy) = i \sinh y, \quad \cos(iy) = \cosh y. \qquad \textbf{(4.8)}$$

- *Περιοδικότητα*: Οι $\sin z$ και $\cos z$ έχουν περίοδο 2π. Οι $\tan z$ και $\cot z$ έχουν περίοδο π.
- *Συμμετρίες*: Οι $\sin z$, $\tan z$, $\cot z$ είναι περιττές. Η $\cos z$ είναι άρτια.
- *Ρίζες*:

$$\sin(k\pi)=\tan(k\pi)=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cot\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \text{όπου}\ k\in\mathbb{Z}. \qquad \textbf{(4.9)}$$

- *Ταυτότητες*: Όλες οι γνωστές μας τριγωνομετρικές ταυτότητες στο $\mathbb{R}$ συνεχίζουν να ισχύουν με την ίδια μορφή και για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με μιγαδική μεταβλητή. Έτσι π.χ. ισχύουν οι τύποι

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \qquad \textbf{(4.10)}$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $\sin z$ μπορεί να βρεθεί αμέσως αν στην (4.10) θέσουμε $z_1=x$, $z_2=iy$ και χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.8). Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y, \qquad \textbf{(4.13)}$$

όπου $z=x+iy$. Εντελώς ανάλογα προκύπτει και η αντίστοιχη σχέση για το $\cos z$

$$\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Βασιζόμενοι στις (4.13) και (4.14) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το μέτρο των $\sin z$ και $\cos z$. Βρίσκουμε τις σχέσεις

$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Εδώ βλέπουμε μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις συναρτήσεις sin και cos ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και στην γενίκευσή τους στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή ότι οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες (διότι δεν είναι φραγμένη η $\sinh y$), σε αντίθεση με τις $\sin x$ και $\cos x$ που είναι φραγμένες αφού παίρνουν τιμές μόνο στο διάστημα [-1,1].

Όσον αφορά την παραγωγισιμότητά τους οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ είναι ακέραιες αναλυτικές αφού είναι γραμμικοί συνδυασμοί της εκθετικής συνάρτησης. Οι παράγωγοί τους προκύπτουν άμεσα από τους τύπους ορισμού, (4.4), (4.5) και την (4.3) και έχουν την ίδια μορφή με αυτή των αντίστοιχων συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή

$$\frac{d}{dz}(\sin z)=\cos z,\quad \frac{d}{dz}(\cos z)=-\sin z. \qquad \textbf{(4.17)}$$

Η συνάρτηση $\tan z$ είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν το $\cos z$. Παρόμοια, η $\cot z$ δεν είναι αναλυτική μόνο στα σημεία που μηδενίζουν το $\sin z$. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι παράγωγοι αυτών των συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dz}(\tan z) = \frac{1}{\cos^2 z} \;, \quad \frac{d}{dz}(\cot z) = -\frac{1}{\sin^2 z}. \qquad \textbf{(4.18)}$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις

Οι *υπερβολικές συναρτήσεις* ορίζονται μέσω των τύπων

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \textbf{(4.19)}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \textbf{(4.20)}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = 1 - \frac{2}{1+e^{2z}}, \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = 1 + \frac{2}{e^{2z}-1}. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Οι βασικές ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων μπορούν να εξαχθούν από αντίστοιχες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αν παρατηρήσουμε ότι οι πρώτες συνδέονται με τις δεύτερες μέσω των σχέσεων

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i\sin(iz). \qquad \textbf{(4.23)}$$

- *Περιοδικότητα*: Οι $\sinh z$ και $\cosh z$ έχουν φανταστική περίοδο $2\pi i$. Οι $\tanh z$ και $\coth z$ έχουν περίοδο πi.
- *Συμμετρίες*: Οι $\sinh z$, $\tanh z$, $\coth z$ είναι περιττές. Η $\cosh z$ είναι άρτια.
- *Ρίζες*: Οι ρίζες των υπερβολικών συναρτήσεων είναι καθαρά φανταστικές και δίνονται από τις σχέσεις

$$\sinh(k\pi i) = \tanh(k\pi i) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad \textbf{(4.24)}$$

$$\cosh\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \coth\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right] = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \textbf{(4.25)}$$

- *Ταυτότητες*: Έχουν την ίδια μορφή με τις αντίστοιχες ταυτότητες στο $\mathbb{R}$, έτσι π.χ.

$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \qquad \textbf{(4.26)}$$

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sinh z_2 \qquad \textbf{(4.27)}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \qquad \textbf{(4.28)}$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις δεν είναι φραγμένες. Τα μέτρα των $\sinh z$ και $\cosh z$ δίνονται από τους τύπους

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y \qquad \textbf{(4.29)}$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \qquad \textbf{(4.30)}$$

όπου $z = x + iy$.

Οι συναρτήσεις $\sinh z$ και $\cosh z$ είναι ακέραιες αναλυτικές με παραγώγους

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = -\sinh z. \qquad \textbf{(4.31)}$$

Η $\tanh z$ είναι αναλυτική παντού όπου $\cosh z \neq 0$, ενώ η $\coth z$ είναι αναλυτική παντού όπου $\sinh z \neq 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι παράγωγοί τους είναι οι

$$\frac{d}{dz}(\tanh z) = \frac{1}{\cosh^2 z}, \quad \frac{d}{dz}(\coth z) = -\frac{1}{\sinh^2 z}. \qquad \textbf{(4.32)}$$

Η συνάρτηση λογάριθμος

Η *συνάρτηση λογάριθμος*, που συμβολίζουμε με το $\log z$, ορίζεται ως η αντίστροφη συνάρτηση της e^z μέσω της σχέσης:

$$e^{\log z} = z \quad \text{με } z \neq 0. \qquad \textbf{(4.33)}$$

Αν εισάγουμε πολικές συντεταγμένες θέτοντας $z = re^{i\theta}$ και $-\pi < \Theta \leq \pi$ όπου Θ η κύρια τιμή του $\arg z$, τότε από την (4.33) προκύπτει αμέσως ότι

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi), \quad \text{με } z \neq 0 \text{ και } n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad \textbf{(4.34)}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι πλειότιμη λόγω του πλειότιμου χαρακτήρα του ορίσματος. Μπορεί να γίνει μονότιμη και αναλυτική αν περιορίσουμε το όρισμα της μεταβλητής z έτσι ώστε $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ένα χωρίο $\Pi(\alpha)$ που περιλαμβάνει όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία της ακτίνας $\theta = \alpha$ που ξεκινά από την αρχή O και σχηματίζει γωνία α με τον πραγματικό άξονα[1]. Η ευθεία αυτή λέγεται *εγκοπή κλάδου* για την συνάρτηση ενώ η έτσι ορισμένη συνάρτηση λέμε ότι αποτελεί ένα *κλάδο της συνάρτησης λογάριθμος*. Η παράγωγος της $\log z$ στο χωρίο $\Pi(\alpha)$ είναι

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}. \qquad \textbf{(4.35)}$$

Η *κύρια τιμή* $\text{Log}z$ της συνάρτησης λογάριθμος ορίζεται με τον τύπο

$$\text{Log}z = \ln r + i\Theta, \quad \text{όπου } -\pi < \Theta \leq \pi \text{ και } z \neq 0. \qquad \textbf{(4.36)}$$

Η συνάρτηση $\text{Log}z$ είναι μονότιμη. Αν θέσουμε $-\pi < \Theta < \pi$, (εδώ $\alpha = \Theta$) τότε λαμβάνουμε τον *κύριο κλάδο* της συνάρτησης λογάριθμος. Η αντίστοιχη εγκοπή κλάδου συνίσταται από τα σημεία του αρνητικού πραγματικού άξονα.

Οι βασικές σχέσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση λογάριθμος στο $\mathbb{R}$ δηλαδή

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \qquad \textbf{(4.37)}$$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2 \qquad \textbf{(4.38)}$$

συνεχίζουν να ισχύουν και στο $\mathbb{C}$ αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η συνάρτηση $\log z$ είναι πλειότιμη. Έτσι η ισότητα στις (4.37), (4.38) πρέπει να εννοείται ως εξής: Αν σε κάθε μια από τις (4.37), (4.38) έχουμε καθορίσει την τιμή στους δύο από τους τρείς όρους που εμπλέκονται σε αυτή τότε υπάρχει τιμή για τον τρίτο όρο τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ισότητα. Προσοχή όμως! Οι (4.37), (4.38) δεν ικανοποιούνται από

[1] Είναι σαν να κάναμε μια τομή στο μιγαδικό επίπεδο κατά μήκος αυτής της ακτίνας.

την μονότιμη συνάρτηση $\mathrm{Log}z$. Επίσης λόγω του πλειότιμου χαρακτήρα της $\log z$ θα έχουμε

$$\log e^{z} = z + 2n\pi i \ , \quad \text{όπου } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.39}$$

ενώ

$$\mathrm{Log} e^{z} = z \ . \tag{4.40}$$

Η συνάρτηση $f(z) = z^{c}$.

Ορισμός:

$$z^{c} = e^{c \log z} \quad \text{αν } \ z \neq 0 \tag{4.41}$$

όπου c είναι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός. Αν στον ανωτέρω ορισμό θέσουμε $c = 1/n$ όπου $n \in \mathbb{N}$ τότε λαμβάνουμε άμεσα τις ρίζες της εξίσωσης $z^{n} = 1$:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\Theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi\right)\right], \tag{4.42}$$

όπου $-\pi < \Theta \leq \pi$ και $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Είναι σαφές από τον ορισμό (4.41) ότι η συνάρτηση z^{c} είναι πλειότιμη. Αν καθορίσουμε ένα συγκεκριμένο κλάδο για την $\log z$ ώστε αυτή να γίνει μονότιμη τότε γίνεται μονότιμη και η z^{c}. Στο πλαίσιο ενός τέτοιου κλάδου μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{cases} z^{c_1 + c_2} = z^{c_1} z^{c_2} & (\text{σε καθορισμένο κλάδο της } z^{c}) \\ z^{c_1 c_2} = (z^{c_1})^{c_2} & (\text{σε καθορισμένο κλάδο της } z^{c}) \end{cases} \tag{4.43}$$

Η συνάρτηση «τετραγωνική ρίζα του z» λαμβάνεται από την (4.42) για $n = 2$ και γράφεται

$$z^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{r} e^{i\frac{\Theta}{2}} \equiv \sqrt{z} & \text{για } \ k = 0 \\ -\sqrt{r} e^{i\frac{\Theta}{2}} \equiv -\sqrt{z} & \text{για } \ k = 1 \end{cases} \tag{4.44}$$

Η τιμή $\sqrt{z}$ στον ανωτέρω τύπο αποτελεί τον κύριο κλάδο $e^{(1/2)\mathrm{Log}z}$ της συνάρτησης $z^{1/2}$ που είναι δίτιμη.

5. ΤΟ ΔΡΟΜΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η έννοια του δρόμου

Η συνάρτηση

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \text{με } t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \tag{5.1}$$

όπου οι συναρτήσεις $x'(t)$ και $y'(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ λέμε ότι παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο μια *ομαλή* (ή *λεία*) *καμπύλη*. Η καμπύλη αυτή είναι *προσανατολισμένη*. Δηλαδή καθώς η πραγματική παράμετρος t διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ κινούμενη από το a προς το b το σημείο $z(t)$ διατρέχει την καμπύλη

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης