ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΤΟ ΔΡΟΜΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

την μονότιμη συνάρτηση $\mathrm{Log}z$. Επίσης λόγω του πλειότιμου χαρακτήρα της $\log z$ θα έχουμε

$$\log e^z = z + 2n\pi i \ , \quad \text{όπου } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.39}$$

ενώ

$$\mathrm{Log} e^z = z \ . \tag{4.40}$$

Η συνάρτηση $f(z) = z^c$.

Ορισμός:

$$z^c = e^{c \log z} \quad \text{αν } z \neq 0 \tag{4.41}$$

όπου c είναι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός. Αν στον ανωτέρω ορισμό θέσουμε $c = 1/n$ όπου $n \in \mathbb{N}$ τότε λαμβάνουμε άμεσα τις ρίζες της εξίσωσης $z^n = 1$:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\frac{\Theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi) + i\sin(\frac{\Theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi)\right] , \tag{4.42}$$

όπου $-\pi < \Theta \leq \pi$ και $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Είναι σαφές από τον ορισμό (4.41) ότι η συνάρτηση z^c είναι πλειότιμη. Αν καθορίσουμε ένα συγκεκριμένο κλάδο για την $\log z$ ώστε αυτή να γίνει μονότιμη τότε γίνεται μονότιμη και η z^c. Στο πλαίσιο ενός τέτοιου κλάδου μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{cases} z^{c_1 + c_2} = z^{c_1} z^{c_2} & (\text{σε καθορισμένο κλάδο της } z^c) \\ z^{c_1 c_2} = (z^{c_1})^{c_2} & (\text{σε καθορισμένο κλάδο της } z^c) \end{cases} \tag{4.43}$$

Η συνάρτηση «τετραγωνική ρίζα του z» λαμβάνεται από την (4.42) για $n = 2$ και γράφεται

$$z^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{r} e^{i\frac{\Theta}{2}} \equiv \sqrt{z} & \text{για } k = 0 \\ -\sqrt{r} e^{i\frac{\Theta}{2}} \equiv -\sqrt{z} & \text{για } k = 1 \end{cases} \tag{4.44}$$

Η τιμή $\sqrt{z}$ στον ανωτέρω τύπο αποτελεί τον κύριο κλάδο $e^{(1/2)\mathrm{Log}z}$ της συνάρτησης $z^{1/2}$ που είναι δίτιμη.

5. ΤΟ ΔΡΟΜΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η έννοια του δρόμου

Η συνάρτηση

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \text{με } t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \tag{5.1}$$

όπου οι συναρτήσεις $x'(t)$ και $y'(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ λέμε ότι παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο μια *ομαλή* (ή *λεία*) *καμπύλη*. Η καμπύλη αυτή είναι *προσανατολισμένη*. Δηλαδή καθώς η πραγματική παράμετρος t διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ κινούμενη από το a προς το b το σημείο $z(t)$ διατρέχει την καμπύλη ξεκινώντας από το $z(a)$ και καταλήγοντας στο $z(b)$. Το μήκος L μιας ομαλής καμπύλης ορισμένης στο διάστημα $[a,b]$ ορίζεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \ , \tag{5.2}$$

και όπως εύκολα αποδεικνύεται είναι ανεξάρτητο από την εκάστοτε εκλογή της παραμέτρου t. Αν πάνω στην καμπύλη υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος σημεία όπου ενώ οι $x(t)$, $y(t)$ είναι συνεχείς κάποια (ή και οι δύο) από τις $x'(t)$ και $y'(t)$ δεν είναι συνεχής η καμπύλη λέγεται *κατά τμήματα ομαλή*. Μια κατά τμήματα ομαλή καμπύλη λέγεται *δρόμος*. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό ο δρόμος είναι η ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους ομαλών καμπύλων όπου το πέρας της μιας συμπίπτει με την αρχή της επόμενης. Ένας δρόμος που δεν αυτοτέμνεται, δηλαδή ένας δρόμος για τον οποίο όταν $t_1 \neq t_2$ τότε $z(t_1) \neq z(t_2)$, λέγεται *απλός*. Τον κλειστό δρόμο, δηλαδή τον δρόμο του οποίου τα άκρα ταυτίζονται , θα τον λέμε *βρόχο*. Ο *απλός βρόχος* είναι ένας δρόμος του οποίου τα μόνα σημεία που ταυτίζονται για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου t είναι τα άκρα του. Είναι ευνόητο ότι το μήκος ενός δρόμου θα είναι το άθροισμα των μηκών των ομαλών καμπύλων που τον συνθέτουν.

Το δρομικό ολοκλήρωμα.

Έστω C ο δρόμος $z = z(t)$, με $a \le t \le b$, και $f(z)$ μια συνάρτηση συνεχής πάνω στον C. Το ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος του δρόμου C ορίζεται από την σχέση

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt \tag{5.3}$$

Σημειώστε ότι αν ο δρόμος C είναι βρόχος τότε το δρομικό ολοκλήρωμα θα συμβολίζεται ως εξής: $\oint_C f(z)dz$. Αν ο βρόχος έχει συγκεκριμένο προσανατολισμό τότε αυτός επιδεικνύεται με ένα βέλος. Π.χ. αν ο προσανατολισμός του βρόχου είναι θετικός (αντίθετος προς την φορά κίνησης των δεικτών ενός ρολογιού) τότε το δρομικό ολοκλήρωμα γράφεται $\displaystyle\ointctrclockwise_C f(z)dz$.

Αν ο δρόμος C βρίσκεται στο εσωτερικό μιας περιοχής του μιγαδικού επιπέδου όπου η $f(z)$ έχει αντιπαράγωγο $F(z)$ (δηλαδή $F'(z) = f(z)$) τότε

$$\int_C f(z)dz = \int_{z(a)}^{z(b)} f(z)dz = F[z(b)] - F[z(a)] \ . \tag{5.4}$$

Παρατηρούμε στην (5.4) ότι το δρομικό ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τον δρόμο C αλλά μόνο από το αρχικό σημείο $z(a)$ και το τελικό σημείο $z(b)$ του δρόμου. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι μόνο σε μια τέτοια περίπτωση είναι επιτρεπτός ο συμβολισμός $\int_{z(a)}^{z(b)} f(\zeta)d\zeta$ για το δρομικό ολοκλήρωμα. Αν τώρα ο δρόμος είναι βρόχος οπότε $z(a) = z(b)$ τότε προφανώς

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Το δρομικό ολοκλήρωμα είναι γραμμικό, δηλαδή αν z_1 και z_2 είναι δύο σταθεροί (δηλαδή ανεξάρτητοι της μεταβλητής z) μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$\int_C [z_1 f(z) + z_2 g(z)]dz = z_1 \int_C f(z)dz + z_2 \int_C g(z)dz. \quad \textbf{(5.5)}$$

Ας θεωρήσουμε δύο δρόμους C_1 και C_2 όπου το πέρας του C_1 συμπίπτει με την αρχή του C_2. Τον δρόμο αυτό θα τον συμβολίζουμε $C_1 + C_2$. Τότε θα ισχύει το εξής:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz. \quad \textbf{(5.6)}$$

Έστω ότι *C* είναι ένας προσανατολισμένος δρόμος με παραμετρική εξίσωση $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Αν στον δρόμο αυτό δώσουμε αντίθετο προσανατολισμό τότε θα τον συμβολίζουμε με –*C*. Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz. \quad \textbf{(5.7)}$$

Μια σημαντική ιδιότητα του δρομικού ολοκληρώματος είναι η *ανισότητα Darboux* που διατυπώνεται ως εξής:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML. \quad \textbf{(5.8)}$$

όπου ο θετικός πραγματικός αριθμός *M* είναι ένα άνω φράγμα της $f(z)$ πάνω στον δρόμο C (δηλαδή $|f(z)| \le M$ για κάθε *z* πάνω στον C) και *L* είναι το μήκος του *C*.

Ένα θεώρημα με θεμελιώδη σημασία στην μιγαδική ανάλυση είναι το ακόλουθο *θεώρημα Cauchy-Goursat*:

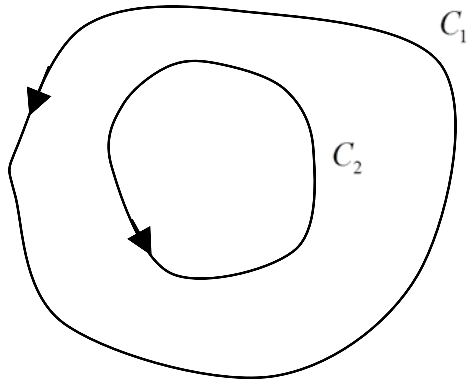
Θεώρημα Cauchy-Goursat: *Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό ενός απλού βρόχου C, τότε*

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Ένα πόρισμα του θεωρήματος Cauchy-Goursat είναι η ονομαζόμενη *αρχή παραμόρφωσης των βρόχων* που διατυπώνεται (βλ. Σχήμα 5.1) ως εξής :

Αρχή παραμόρφωσης των βρόχων: *Έστω ότι ένας απλός βρόχος C_1 περικλείει τον απλό βρόχο C_2 που έχει τον ίδιο προσανατολισμό με τον C_1. Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στην περιοχή που έχει εξωτερικό σύνορο τον C_1 και εσωτερικό σύνορο τον C_2 τότε θα ισχύει*

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$



Σχήμα 5.1

Με την βοήθεια του θεωρήματος Cauchy-Goursat και της αρχής παραμόρφωσης των βρόχων εύκολα αποδεικνύεται ο ακόλουθος τύπος που φέρει την ονομασία *ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy*.

Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy: *Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του απλού και θετικά προσανατολισμένου βρόχου C και z είναι ένα τυχόν σημείο στο εσωτερικό του C, τότε θα ισχύει ο τύπος*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\,d\varsigma\,.$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται και για τις παραγώγους της συνάρτησης $f(z)$ ως εξής:

Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για τις παραγώγους: *Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του απλού και θετικά προσανατολισμένου βρόχου C και z είναι ένα τυχόν σημείο στο εσωτερικό του C, τότε στο z η $f(z)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης που δίνονται από τον τύπο*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}}\,d\varsigma, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Παρατηρούμε ότι στον τύπο αυτό θέτοντας $n = 0$ λαμβάνουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

6. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ

Δυναμοσειρές: Μια σειρά με την μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad \textbf{(6.1)}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης