ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

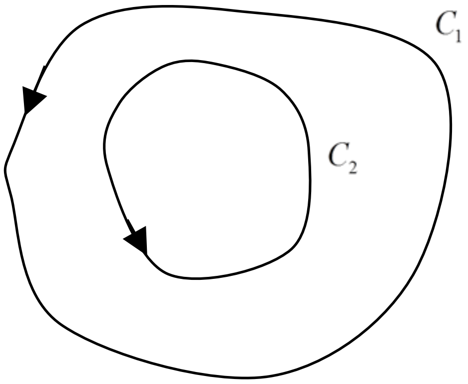
Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης



Σχήμα 5.1

Με την βοήθεια του θεωρήματος Cauchy-Goursat και της αρχής παραμόρφωσης των βρόχων εύκολα αποδεικνύεται ο ακόλουθος τύπος που φέρει την ονομασία *ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy*.

Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy: *Αν η συνάρτηση* $f(z)$ *είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του απλού και θετικά προσανατολισμένου βρόχου C και z είναι ένα τυχόν σημείο στο εσωτερικό του C, τότε θα ισχύει ο τύπος*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma\ .$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται και για τις παραγώγους της συνάρτησης $f(z)$ ως εξής:

Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για τις παραγώγους: *Αν η συνάρτηση* $f(z)$ *είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του απλού και θετικά προσανατολισμένου βρόχου C και z είναι ένα τυχόν σημείο στο εσωτερικό του C, τότε στο z η* $f(z)$ *έχει παραγώγους κάθε τάξης που δίνονται από τον τύπο*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}}d\varsigma, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Παρατηρούμε ότι στον τύπο αυτό θέτοντας $n=0$ λαμβάνουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

6. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ

Δυναμοσειρές: Μια σειρά με την μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots \qquad \textbf{(6.1)}$$

λέγεται *δυναμοσειρά*. Οι μιγαδικοί αριθμοί a_n είναι *οι συντελεστές της σειράς* και το z_0 το κέντρο της και δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή z. Η σειρά αυτή συγκλίνει πάντα στο a_0 όταν $z = z_0$ και επομένως το πεδίο σύγκλισής της πάντα περιέχει το κέντρο της. Το πεδίο σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι το σύνολο των σημείων στο μιγαδικό επίπεδο στα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει και αυτό το πεδίο σύγκλισης είναι πάντα ένας κυκλικός δίσκος του οποίου το κέντρο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς. Ποιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 6.1 *Έστω η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο* $z_1 \neq z_0$ *χωρίς όμως να συγκλίνει σε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου. Τότε υπάρχει ένας θετικός αριθμός R τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει απόλυτα σε όλα τα σημεία z του ανοικτού κυκλικού δίσκου* $|z-z_0| < R$ *και να αποκλίνει σε όλα τα σημεία με* $|z-z_0| > R$. *Επί πλέον, αν* $0 < r < R$, *η δυναμοσειρά θα συγκλίνει και ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία του κλειστού κυκλικού δίσκου* $|z-z_0| \leq r$. *Ο αριθμός R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς και ο κύκλος* $|z-z_0| = R$ *στο εσωτερικό του οποίου η δυναμοσειρά συγκλίνει λέγεται κύκλος σύγκλισης της δυναμοσειράς.*

Μια ιδιαίτερα χρήσιμη δυναμοσειρά είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots$$

της οποίας οι όροι αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με λόγο z. Το πεδίο σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι το χωρίο $|z| < 1$. Όταν $|z| > 1$ ή $z = 1$ η δυναμοσειρά αποκλίνει. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{όταν} \quad |z| < 1. \tag{6.2}$$

Μια δυναμοσειρά στο πεδίο σύγκλισής της συγκλίνει πάντα σε μία αναλυτική συνάρτηση. Ειδικότερα, ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 6.2 *Κάθε δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *ορίζει μέσα στο πεδίο σύγκλισής της μια αναλυτική συνάρτηση* $f(z)$. *Οι παράγωγοι της* $f(z)$ *λαμβάνονται με παραγώγιση της δυναμοσειράς όρο προς όρο και οι αντίστοιχες παραγωγισμένες δυναμοσειρές έχουν το ίδιο πεδίο σύγκλισης με την αρχική δυναμοσειρά. Τέλος, το ολοκλήρωμα της* $f(z)$ *κατά μήκος ενός οποιουδήποτε δρόμου μέσα στο πεδίο σύγκλισης λαμβάνεται με ολοκλήρωση όρο προς όρο της δυναμοσειράς κατά μήκος αυτού του δρόμου.*

Ισχύει όμως και το αντίστροφο του θεωρήματος αυτού. Κάθε συνάρτηση που είναι αναλυτική σε ένα κυκλικό δίσκο αναλύεται σε δυναμοσειρά σε κάθε σημείο αυτού του δίσκου. Το σχετικό θεώρημα φέρει την ονομασία *θεώρημα του Taylor* και η διατύπωσή του έχει ως εξής:

Θεώρημα του Taylor *Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στον ανοικτό κυκλικό δίσκο $|z-z_0|<R_0$ τότε σε κάθε σημείο z του δίσκου η $f(z)$ μπορεί να αναλυθεί σε δυναμοσειρά ως εξής:*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{6.3}$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{για } n=0,1,2,\ldots \tag{6.4}$$

Η δυναμοσειρά (6.3) με τους συντελεστές όπως εκφράζονται μέσω της $f(z)$ από την (6.4) έχει καθιερωθεί να λέγεται *σειρά Taylor*. Κάθε δυναμοσειρά που συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f(z)$ είναι η σειρά Taylor της $f(z)$. Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 6.3 *Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει προς την συνάρτηση $f(z)$ στο εσωτερικό κάποιου κύκλου $|z-z_0|=R$ τότε αυτή είναι η σειρά Taylor της $f(z)$ γύρω από το z_0.*

Κάθε συνάρτηση $f(z)$ που είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0 αναπτύσσεται σε σειρά Taylor (6.3) σε ένα χωρίο που είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο το z_0 δηλαδή σε ένα χωρίο της μορφής $|z-z_0|<R$. Το *R*, η ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor, είναι η απόσταση του z_0 από το κοντινότερό του ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Αν η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο z_0 τότε πάλι μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά δυνάμεων του $z-z_0$ μόνο που τώρα στο ανάπτυγμα θα υπάρχουν και αρνητικές δυνάμεις του $z-z_0$. Γενικότερα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα του Laurent. *Έστω μια συνάρτηση $f(z)$ που είναι αναλυτική στο δακτυλιοειδές χωρίο $R_1<|z-z_0|<R_2$ όπου $R_1\geq 0$ και C ένας απλός βρόχος γύρω από το z_0 που κείται εξ' ολοκλήρου μέσα σε αυτό το χωρίο. Τότε σε κάθε σημείο z του χωρίου η $f(z)$ αναλύεται σε σειρά δυνάμεων του $z-z_0$ ως εξής:*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{6.5}$$

όπου

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ , \quad n=0,1,2,\ldots \tag{6.6}$$

και

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1}dz\ , \quad n=1,2,\ldots \tag{6.7}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος. «Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αδειοδότησης