ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ, ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

7. ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ, ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Ένα σημείο z_0 λέγεται *ανώμαλο σημείο* της συνάρτησης $f(z)$ αν η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο z_0. Αν επί πλέον υπάρχει μια τρυπημένη γειτονιά του z_0 της μορφής $0<|z-z_0|<R$ (όπου το R είναι μικρότερο ή ίσο με την απόσταση του z_0 από το κοντινότερο ανώμαλο σημείο της $f(z)$) σε όλα τα σημεία της οποίας η $f(z)$ να είναι αναλυτική τότε το z_0 λέγεται *μεμονωμένο ανώμαλο σημείο* της $f(z)$. Σε αυτή τη γειτονιά (που είναι ένα δακτυλιοειδές χωρίο στο οποίο ο κεντρικός κυκλικός δίσκος αποτελείται από ένα μόνο σημείο) η $f(z)$ αναλύεται στη σειρά Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\ldots \qquad \textbf{(7.1)}$$

της οποίας οι συντελεστές των αρνητικών δυνάμεων του $z-z_0$ δίνονται από τον τύπο (6.7). Εφαρμόζοντας αυτό τον τύπο για $n=1$ παίρνουμε

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i b_1 \qquad \textbf{(7.2)}$$

όπου C είναι ένας οποιοσδήποτε ορθά προσανατολισμένος απλός βρόχος γύρω από το σημείο z_0 ο οποίος περιέχεται στο δακτυλιοειδές χωρίο $0<|z-z_0|<R$. Ο αριθμός b_1 που είναι ο συντελεστής του $(z-z_0)^{-1}$ στο ανάπτυγμα του Laurent λέγεται *ολοκληρωτικό υπόλοιπο* της συνάρτησης $f(z)$ στο σημείο z_0 και συμβολίζεται ως εξής:

$$b_1\equiv \mathrm{Res}_{z=z_0}f(z). \qquad \textbf{(7.3)}$$

Επειδή ο υπολογισμός του b_1 είναι συχνά εύκολος για τις συναρτήσεις που συναντάμε στις εφαρμογές ο τύπος (7.2) αποτελεί μια ισχυρότατη μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων γύρω από απλούς βρόχους.

Το μέρος του αναπτύγματος Laurent (7.1) που περιέχει τις αρνητικές δυνάμεις του $z-z_0$ δηλαδή το

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\ldots$$

λέγεται *κύριο μέρος* (ή και *πρωτεύον μέρος*) της συνάρτησης $f(z)$ στο μεμονωμένο ανώμαλο σημείο z_0. Αν δε το πλήθος των όρων του κύριου μέρους είναι άπειρο τότε το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο z_0 λέγεται *ουσιώδες ανώμαλο*. Αν αντιθέτως το κύριο μέρος έχει πεπερασμένο πλήθος όρων και ο όρος με την υψηλότερη αρνητική δύναμη είναι ο $b_m(z-z_0)^{-m}$, όπου m ένας θετικός ακέραιος, τότε το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο z_0 λέγεται *πόλος τάξης m* της $f(z)$. Στην περίπτωση που $m=1$ το z_0 λέγεται *απλός πόλος* της $f(z)$. Μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται *μερόμορφη* σε ένα χωρίο D του μιγαδικού επιπέδου αν είναι αναλυτική στο D εκτός από κάποια πεπερασμένα στο πλήθος σημεία του D τα οποία είναι πόλοι. Οι συναρτήσεις που συναντάμε στις εφαρμογές είναι κατά κανόνα μερόμορφες.

Ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο το οποίο είναι πόλος είναι συχνά πολύ εύκολος. Επ' αυτού ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 7.1 *Αν μια συνάρτηση* $f(z)$ *μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},\quad \text{όπου } m \text{ θετικός ακέραιος} \tag{7.4}$$

και η $\phi(z)$ *είναι αναλυτική στο* z_0 *με* $\phi(z_0)\neq 0$*, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της* $f(z)$ *στο* z_0 *(το οποίο είναι πόλος τάξης m για την* $f(z)$*) γράφεται*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \tag{7.5}$$

Αν $m=1$ *ο ανωτέρω τύπος παίρνει την απλή μορφή*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\phi(z_0).$$

Ένας άλλος ιδιαίτερα χρήσιμος τύπος υπολογισμού του ολοκληρωτικού υπολοίπου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο που είναι απλός της πόλος δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 7.2 *Αν μια συνάρτηση* $f(z)$ *μπορεί να γραφεί στην μορφή* $f(z)=p(z)/q(z)$ *όπου οι συναρτήσεις* $p(z)$ *και* $q(z)$ *είναι αναλυτικές στο σημείο* z_0 *με* $q(z_0)=0,\ q'(z_0)\neq 0$ *και* $p(z_0)\neq 0$ *τότε το* z_0 *είναι απλός πόλος της* $f(z)$ *και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο εκεί είναι*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{7.6}$$

Ο τύπος (7.2) εύκολα γενικεύεται στη μορφή του ακόλουθου θεωρήματος το οποίο παίζει κεντρικό ρόλο στους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων στην μιγαδική αλλά και την πραγματική ανάλυση.

Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(z)$ *είναι αναλυτική πάνω στον θετικά προσανατολισμένο απλό βρόχο C. Αν επί πλέον η* $f(z)$ *είναι αναλυτική στο εσωτερικό του C εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων ανώμαλων σημείων* z_k *με* $k=1,2,...,n$ *τότε ισχύει ο τύπος*

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)\ . \tag{7.7}$$

Υπολογισμός Πραγματικών ολοκληρωμάτων

Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων. Η μέθοδος συνίσταται στην θεώρηση ενός δρομικού ολοκληρώματος μιας κατάλληλα επιλεγμένης συνάρτησης της μεταβλητής *z* πάνω σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο βρόχο. Η επιλογή της συνάρτησης και του βρόχου δεν είναι σε όλες τις περιπτώσεις εύκολη αλλά συχνά απαιτεί πείρα σε τέτοιου είδους υπολογισμούς όπως και φαντασία. Εδώ αναφερόμαστε μόνο σε τρεις κλασικές αλλά και απλές περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου οι οποίες σε καμμιά περίπτωση δεν εξαντλούν τις δυνατότητές της.

1^{η} Περίπτωση: Γενικευμένα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad \textbf{(7.8)}$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι ρητή, δηλαδή $f(x) = P_m(x)/P_n(x)$ όπου $P_m(x)$, $P_n(x)$ είναι πολυώνυμα βαθμού *m* και *n* αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα (7.8) θα πρέπει $m \le n-2$. Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί αν θεωρήσουμε το δρομικό ολοκλήρωμα

$$\oint_C f(z)dz$$

πάνω σε ένα βρόχο *C* όπως στο παρακάτω σχήμα 7.1. Ο βρόχος αποτελείται από ένα ημικύκλιο C_R ακτίνας *R* με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και την διάμετρό του να πάνω στον πραγματικό άξονα. Για να μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος δεν πρέπει η $f(z)$ να έχει ανώμαλο σημείο πάνω στον πραγματικό άξονα. Η ακτίνα του βρόχου πρέπει αρχικά να ληφθεί τόσο μεγάλη ώστε ο βρόχος να περικλείει όλα τα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ τα οποία βρίσκονται στο άνω ($y > 0$) μιγαδικό ημιεπίπεδο. (Στο σχήμα 7.1 θεωρήσαμε ότι η $f(z)$ έχει τέσσερα ανώμαλα σημεία από τα οποία τα τρία βρίσκονται το άνω ημιεπίπεδο). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων για το βρόχο *C* το οποίο γράφεται

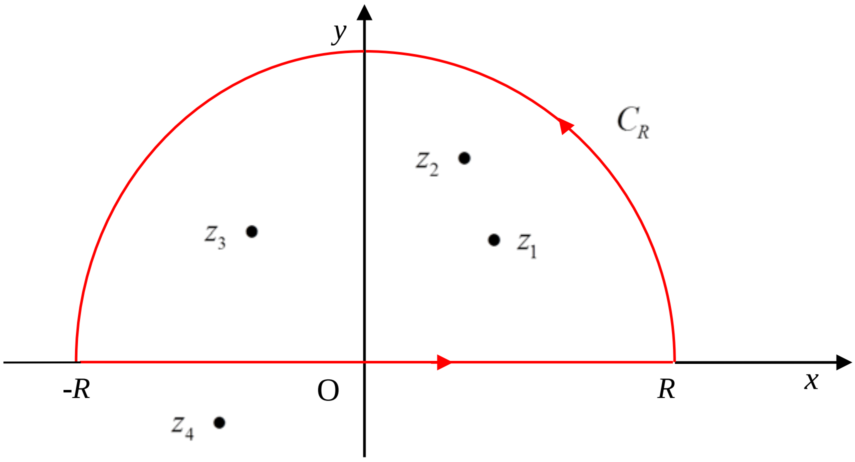
$$\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Αν αποδείξουμε (με τη βοήθεια της ανισότητας Darboux) ότι στο όριο που $R \to \infty$ το δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον δρόμο C_R τείνει στο μηδέν, δηλαδή ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

τότε η ζητούμενη τιμή του πραγματικού ολοκληρώματος θα είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$



Σχήμα 7.1

<u>2η Περίπτωση</u>: Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(ax)dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(ax)dx\,, \qquad \textbf{(7.9)}$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι ρητή. Ο υπολογισμός τους με την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι πανομοιότυπος με αυτόν της $1^{ης}$ περίπτωσης. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z)e^{iaz}$ την οποία αν $\alpha > 0$ ολοκληρώνουμε[2] κατά μήκος του ημικυκλικού βρόχου του σχήματος 7.1. Για να είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος θα πρέπει η $f(z)$ να μην έχει ανώμαλα σημεία πάνω στον πραγματικό άξονα. Αν το δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στην ημιπεριφέρεια C_R μηδενίζεται στο όριο $R \to \infty$, δηλαδή

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0 \quad \text{όπου } a > 0\,,$$

τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\left[\sum_k \mathrm{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{iaz}\right)\right],$$

και τα ζητούμενα πραγματικά ολοκληρώματα λαμβάνονται με την εξίσωση των πραγματικών και φανταστικών μερών στην ανωτέρω εξίσωση. Εδώ η σύγκλιση του δρομικού ολοκληρώματος πάνω στον C_R είναι δυνατή ακόμα και αν ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή της ρητής συνάρτησης $f(z)$ είναι μεγαλύτερος μόνο κατά μια μονάδα από τον βαθμό του αριθμητή. Σε αυτή όμως την περίπτωση για να αποδειχθεί η σύγκλιση πρέπει να επικαλεστούμε το *λήμμα Jordan* του οποίου η εκφώνηση έχει ως εξής:

---

[2] Αν $\alpha < 0$ τότε ή ολοκληρώνουμε κατά μήκος ενός ημικυκλικού βρόχου στο αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο ($y < 0$) , ή θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)e^{-iaz}$ και διεξάγουμε τον υπολογισμό ως ανωτέρω με τον βρόχο του σχήματος 7.1.

Λήμμα Jordan *Έστω ότι όλα τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης* $f(z)$ *στο άνω ημιεπίπεδο κείνται κάτω από το ημικύκλιο* C_R *με* $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. *Αν επί πλέον για όλα τα z πάνω στο* C_R *υπάρχει σταθερά* M_R *με* $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ *και τέτοια ώστε* $|f(z)| \le M_R$, *τότε θα έχουμε*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0 \quad \text{όπου } a > 0. \tag{7.10}$$

3η Περίπτωση: Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta \tag{7.11}$$

όπου $f(\sin\theta, \cos\theta)$ είναι μια συνάρτηση των $\cos\theta$ και $\sin\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο *C* με κέντρο την αρχή των αξόνων: $z = e^{i\theta}$, με $0 \le \theta \le 2\pi$. Όταν η θ μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η μεταβλητή z διαγράφει προφανώς στο μιγαδικό επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο *C* που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων. Εξ' άλλου, από τον τύπο του Euler προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \tag{7.12}$$

ενώ $d\theta = dz / iz$. Εισάγοντας αυτές τις τιμές στο προς υπολογισμό πραγματικό ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι αυτό δεν είναι τίποτα άλλο παρά η παραμετρική έκφραση (με παράμετρο το θ) ενός δρομικού ολοκληρώματος κατά την θετική φορά πάνω στον μοναδιαίο κύκλο *C*

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \oint_C f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz} \tag{7.13}$$

Αν η συνάρτηση $f(\sin\theta, \cos\theta)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ τότε και η συνάρτηση f/z κάτω από το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (7.13) θα είναι μια ρητή συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής z. Σε αυτή την περίπτωση ο υπολογισμός του ολοκληρώματος πάνω στον βρόχο *C* είναι εύκολος αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών αφού πρώτα εντοπίσουμε τους πόλους της συνάρτησης f/z οι οποίοι περικλείονται από τον *C*.

8. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Η γραμμική απεικόνιση

Η γενική μορφή μιας *γραμμικής απεικόνισης* (ή *γραμμικού μετασχηματισμού* όπως αλλιώς λέγεται) είναι η

$$w \equiv f(z) = az + b \tag{8.1}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης