ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Λήμμα Jordan *Έστω ότι όλα τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο κείνται κάτω από το ημικύκλιο C_R με $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Αν επί πλέον για όλα τα z πάνω στο C_R υπάρχει σταθερά M_R με $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ και τέτοια ώστε $|f(z)| \le M_R$, τότε θα έχουμε*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0 \quad \text{όπου } a > 0. \tag{7.10}$$

<u>3η Περίπτωση</u>: Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta \tag{7.11}$$

όπου $f(\sin\theta, \cos\theta)$ είναι μια συνάρτηση των $\cos\theta$ και $\sin\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο *C* με κέντρο την αρχή των αξόνων: $z = e^{i\theta}$, με $0 \le \theta \le 2\pi$. Όταν η θ μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η μεταβλητή z διαγράφει προφανώς στο μιγαδικό επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο *C* που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων. Εξ' άλλου, από τον τύπο του Euler προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \tag{7.12}$$

ενώ $d\theta = dz / iz$. Εισάγοντας αυτές τις τιμές στο προς υπολογισμό πραγματικό ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι αυτό δεν είναι τίποτα άλλο παρά η παραμετρική έκφραση (με παράμετρο το θ) ενός δρομικού ολοκληρώματος κατά την θετική φορά πάνω στον μοναδιαίο κύκλο *C*

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \oint_C f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz} \tag{7.13}$$

Αν η συνάρτηση $f(\sin\theta, \cos\theta)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ τότε και η συνάρτηση f/z κάτω από το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (7.13) θα είναι μια ρητή συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής z. Σε αυτή την περίπτωση ο υπολογισμός του ολοκληρώματος πάνω στον βρόχο *C* είναι εύκολος αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών αφού πρώτα εντοπίσουμε τους πόλους της συνάρτησης f/z οι οποίοι περικλείονται από τον *C*.

8. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Η γραμμική απεικόνιση

Η γενική μορφή μιας *γραμμικής απεικόνισης* (ή *γραμμικού μετασχηματισμού* όπως αλλιώς λέγεται) είναι η

$$w \equiv f(z) = az + b \tag{8.1}$$

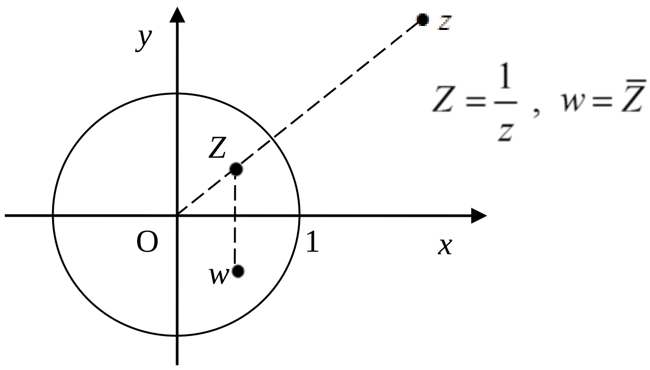
όπου a και b μιγαδικές σταθερές με την a διάφορη του μηδενός. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο, η γραμμική απεικόνιση (8.1) μπορεί να θεωρηθεί εν γένει ως η σύνθεση των ακόλουθων επίπεδων γεωμετρικών μετασχηματισμών:

1) Μιας περιστροφής κέντρου Ο και γωνίας $\arg a$
2) Μιας ομοιοθεσίας[3] κέντρου Ο και λόγου $|a|$
3) Μιας παράλληλης μετατόπισης κατά το διάνυσμα με συνιστώσες $(\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b)$

Επειδή η γραμμική απεικόνιση αποτελείται από τους ανωτέρω μετασχηματισμούς είναι προφανές ότι η εικόνα ενός οποιουδήποτε σχήματος είναι ένα σχήμα όμοιο με το αρχικό. Ειδικότερα, οι ευθείες απεικονίζονται σε ευθείες και οι κύκλοι σε κύκλους. Η απλότητα αυτής της απεικόνισης κάνει πιο βολικό για την σχηματική της περιγραφή να χρησιμοποιούμε αντί δύο επίπεδα μόνο το z-επίπεδο πάνω στο οποίο σχεδιάζουμε και την εικόνα του αρχικού αντικειμένου.

Η απεικόνιση $w = 1/z$.

Η απεικόνιση $w = 1/z$ είναι η σύνθεση μιας αντιστροφής[4] κέντρου Ο και δύναμης 1 και μιας ανάκλασης ως προς τον πραγματικό άξονα (βλέπε Σχ. 8.1).



Σχήμα 8.1

Εύκολα αποδεικνύεται ότι *η απεικόνιση $w = 1/z$ απεικονίζει κύκλους ή ευθείες του μιγαδικού επιπέδου σε κύκλους ή ευθείες* και ειδικότερα ότι:

1) Ένας κύκλος ($a \neq 0$) που δεν περνάει από την αρχή ($d \neq 0$) στο z-επίπεδο απεικονίζεται σε ένα κύκλο που δεν περνάει από την αρχή στο w-επίπεδο.

---

[3] Στην Ευκλείδια Γεωμετρία ο σημειακός μετασχηματισμός που στο τυχόν σημείο M αντιστοιχεί το σημείο M' επί της ευθείας OM (όπου O είναι ένα σταθερό σημείο του χώρου) τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ λέγεται *ομοιοθεσία*. Το σημείο O λέγεται *κέντρο της ομοιοθεσίας* και ο πραγματικός αριθμός. k *λόγος ομοιοθεσίας*. Στην ειδική περίπτωση που $k = 1$ έχουμε ένα *ταυτοτικό* μετασχηματισμό ενώ όταν $k = -1$ έχουμε *συμμετρία* με κέντρο το O.

[4] Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ο σημειακός μετασχηματισμός που στο τυχόν σημείο M αντιστοιχεί το σημείο M' επί της ευθείας OM (όπου O ένα σταθερό σημείο του χώρου) τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} / \left|\overrightarrow{OM}\right|^2$ λέγεται αντιστροφή κέντρου (ή πόλου) O και δύναμης k.

2) Ένας κύκλος ($a \neq 0$) που περνάει από την αρχή ($d = 0$) στο *z*-επίπεδο απεικονίζεται σε μία ευθεία που δεν περνάει από την αρχή στο *w*-επίπεδο.

3) Μία ευθεία ($a = 0$) που δεν περνάει από την αρχή ($d \neq 0$) στο *z*-επίπεδο απεικονίζεται σε ένα κύκλο που περνάει από την αρχή στο *w*-επίπεδο.

4) Μία ευθεία ($a = 0$) που περνάει από την αρχή ($d = 0$) στο *z*-επίπεδο απεικονίζεται σε μία ευθεία που περνάει από την αρχή στο *w*-επίπεδο.

Η διγραμμική απεικόνιση

Η *διγραμμική απεικόνιση* η οποία λέγεται συχνά και *μετασχηματισμός Mobius* ή και *ομογραφικός μετασχηματισμός* ορίζεται από τον τύπο

$$w \equiv T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{με} \;\; ad - bc \neq 0, \qquad \textbf{(8.2)}$$

όπου a, b, c, d είναι μιγαδικές σταθερές. Αν $c = 0$ η $T(z)$ εκφυλλίζεται σε μια γραμμική απεικόνιση. Αν $c \neq 0$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο ορισμός (8.2) μπορεί να γραφεί και στην μορφή

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \qquad \textbf{(8.3)}$$

στην οποία είναι εμφανής η αναγκαιότητα του περιορισμού $ad - bc \neq 0$. Όταν ο περιορισμός αυτός δεν ικανοποιείται η $T(z)$ εκφυλλίζεται στην σταθερή απεικόνιση $w = a/c$. Από την (8.3) εύκολα διαπιστώνουμε ότι η διγραμμική απεικόνιση συντίθεται από τις ακόλουθες γνωστές μας απεικονίσεις:

$$Z = cz + d, \;\; W = \frac{1}{Z}, \;\; w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} W, \qquad \textbf{(8.4)}$$

όπου βέβαια $c \neq 0$ και $ad - bc \neq 0$. Επειδή καθεμιά από αυτές τις τρεις επί μέρους απεικονίσεις απεικονίζει κύκλους ή ευθείες σε κύκλους ή ευθείες είναι φανερό ότι και η γενική διγραμμική απεικόνιση (8.2) θα έχει την ίδια ιδιότητα. Μια σημαντική ιδιότητα της διγραμμικής απεικόνισης (8.2) είναι ότι διατηρεί τον διπλό λόγο. Ο διπλός λόγος $\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4)$ τεσσάρων διάφορων μεταξύ τους σημείων z_1, z_2, z_3, z_4 ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{cr}(z_1, z_2; z_3, z_4) \equiv \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \div \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} \qquad \textbf{(8.5)}$$

Σύμμορφες απεικονίσεις

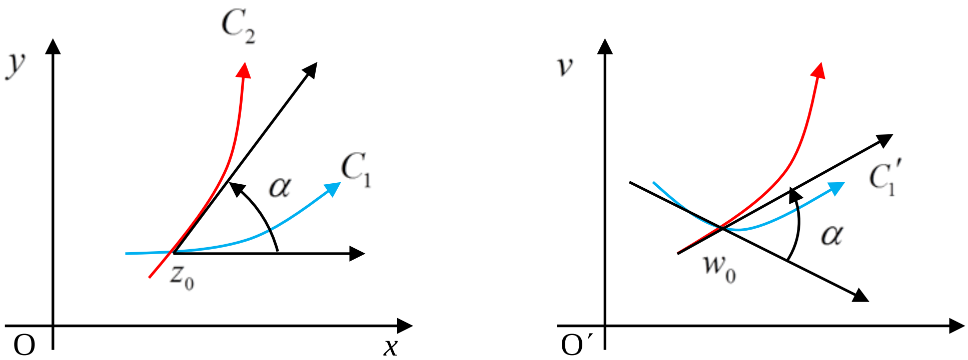
Μια συνάρτηση $w = f(z)$ με πεδίο ορισμού το χωρίο Δ του μιγαδικού επιπέδου λέμε ότι ορίζει μία *σύμμορφη απεικόνιση* στο σημείο $z_0 \in \Delta$ αν η $f(z)$ είναι αναλυτική στο z_0 και $f'(z_0) \neq 0$. Αν η $w = f(z)$ είναι σύμμορφη σε κάθε σημείο του Δ τότε λέγεται σύμμορφη απεικόνιση στο Δ.

Μια απεικόνιση $w = f(z)$ σύμμορφη σε ένα χωρίο *Δ* ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία του *Δ* και στα σημεία της εικόνας *Δ΄* του *Δ* στο *w*-επίπεδο. Μια σημαντική ιδιότητα της σύμμορφης απεικόνισης από την οποία έχει πάρει και το όνομά της είναι ότι διατηρεί τις γωνίες.

Έστω μια απεικόνιση $w = f(z)$ η οποία είναι σύμμορφη σε ένα χωρίο *Δ* στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει μια ομαλή καμπύλη *C* η οποία έστω ότι διέρχεται από το σημείο $z_0 \in \Delta$. Η δράση της σύμμορφης απεικόνισης στο z_0 πάνω στην καμπύλη *C* έχει σαν συνέπεια την περιστροφή της εφαπτομένης της στο z_0 (και επομένως την περιστροφή της ίδιας της καμπύλης στο z_0) κατά *γωνία στροφής* ίση με

$$\psi_0 = \arg f'(z_0) \ . \tag{8.6}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ομαλές καμπύλες C_1 και C_2 (σχήμα 8.2) που τέμνονται στο σημείο z_0 σχηματίζοντας μεταξύ τους γωνία *α*. Τότε οι εικόνες τους C_1' και C_2' μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$ θα σχηματίζουν την ίδια γωνία *α* στο σημείο $w_0 = f(z_0)$.



Σχήμα 8.2

Η ποσότητα $|f'(z_0)|$ λέγεται *συντελεστής κλίμακας* στο σημείο z_0. Σε μια αρκούντως μικρή γειτονιά του z_0 μπορούμε κατά προσέγγιση να γράψουμε

$$|f(z) - f(z_0)| \simeq |f'(z_0)||z - z_0|. \tag{8.7}$$

Όταν $|f'(z_0)|>1$ έχουμε διαστολή ενώ όταν $|f'(z_0)|<1$ έχουμε συστολή. Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα *σταθερά σημεία* μιας απεικόνισης. Αυτά είναι τα σημεία που έχουν σαν εικόνα τον εαυτό τους. Δηλαδή είναι τα σημεία z_0 που ικανοποιούν την εξίσωση

$$z_0 = f(z_0) \ . \tag{8.8}$$

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή της σύμμορφης απεικόνισης είναι η χρήση της για την επίλυση δισδιάστατων προβλημάτων Dirichlet.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης