ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΧΩΡΟΙ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

9. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΧΩΡΟΙ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER.

Η «συνάρτηση» δέλτα του Dirac.

Η *«συνάρτηση» δέλτα* ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\delta\left[\phi(x)\right] = \int_D \phi(x)\delta(x)dx = \begin{cases} \phi(0) & \text{αν } \ 0 \in D \\ 0 & \text{αν } \ 0 \notin D \end{cases} \qquad \textbf{(9.1)}$$

όπου η $\phi(x)$ είναι μια συνάρτηση που ανήκει σε ένα σύνολο συναρτήσεων που λέγονται *συναρτήσεις ελέγχου* (test functions). Οι συναρτήσεις αυτές είναι εν γένει κατά τμήματα συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και έχουν παραγώγους κάθε τάξης σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού τους εκτός βέβαια από τα σημεία ασυνέχειας τα οποία είναι πεπερασμένα στο πλήθος. Το σύνολο $D \equiv [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ είναι το λεγόμενο *στήριγμα* της συνάρτησης $\phi(x)$, δηλαδή το διάστημα στο οποίο περικλείεται όλη η «χρήσιμη» πληροφορία της συνάρτησης. Έξω από αυτό το διάστημα η $\phi(x)$ είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν. Στην περίπτωση που το στήριγμα μιας συνάρτησης ελέγχου $\phi(x)$ είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ τότε υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0$. Από τον ορισμό (9.1) φαίνεται ότι η $\delta(x)$ δεν είναι συνάρτηση με τη συνηθισμένη έννοια που δίνουμε στον όρο (γι' αυτό άλλωστε χρησιμοποιούμε τα εισαγωγικά στον όρο συνάρτηση όταν αναφερόμαστε σε αυτή) αλλά μια γραμμική απεικόνιση του συνόλου των συναρτήσεων ελέγχου στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Έτσι, παραστάσεις της μορφής $f(x)\delta(x)$ ή $f(x)+\delta(x)$ όπου $f(x)$ είναι μια συνηθισμένη συνάρτηση δεν έχουν κατ' αρχήν καμία έννοια θεωρούμενες υπό το πρίσμα του συνηθισμένου πολλαπλασιασμού ή αθροίσματος συναρτήσεων, αφού όπως φαίνεται και από τον ορισμό (9.1) η $\delta(x)$ δρα πάνω στις συναρτήσεις ελέγχου $\phi(x)$ πάντα κάτω από το σύμβολο της ολοκλήρωσης για να δώσει σαν αποτέλεσμα ένα αριθμό $\phi(0)$ που είναι η τιμή της εκάστοτε $\phi(x)$ στο σημείο $x = 0$. Εν τούτοις στην παράσταση $f(x)\delta(x)$ δίνουμε περιεχόμενο ορίζοντας με αυτή την γενικευμένη συνάρτηση που στην τυχούσα συνάρτηση ελέγχου $\phi(x)$ αντιστοιχεί τον αριθμό $f(0)\phi(0)$. Δηλαδή η $f(x)\delta(x)$ δρα πάνω στις συναρτήσεις ελέγχου με τον μηχανισμό της εξίσωσης (9.1) :

$$\int_D \phi(x) f(x)\delta(x)dx = \phi(0) f(0).$$

Έτσι είναι προφανές π.χ. ότι

$$x\delta(x) = 0 \ , \qquad \textbf{(9.2)}$$

Όπου με αυτή την εξίσωση εννοούμε ότι η $x\delta(x)$ αντιστοιχεί κάθε συνάρτηση ελέγχου στον αριθμό 0.

Μαθηματικές οντότητες όπως η $\delta(x)$ λέγονται *κατανομές* (distributions) ή ακόμα και *γενικευμένες συναρτήσεις* (generalized functions). Ειδικότερα για την $\delta(x)$ χρησιμοποιούνται και οι όροι *κατανομή του Dirac* ή και *κατανομή δέλτα*. Αν στον ορισμό (9.1) εισάγουμε ως συνάρτηση ελέγχου[5] την σταθερή συνάρτηση $\phi(x)=1$ με πεδίο ορισμού όλη την πραγματική ευθεία, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \ . \tag{9.3}$$

Η σχέση αυτή, μαζί με την υπόθεση ότι η $\delta(x)$ μηδενίζεται παντού εκτός από το σημείο $x=0$ που αποκλίνει στο ∞, χρησιμοποιείται καμιά φορά σε βιβλία φυσικής για τον ορισμό της «συνάρτησης» δέλτα.

Με μια παράλληλη μετατόπιση στην αρχή O του άξονα των x, δηλαδή το $x \to x-a$, μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό (9.1) και να πάρουμε τη δράση της $\delta(x-a)$ πάνω στις συναρτήσεις ελέγχου. Έτσι, αν συμβολίσουμε την δράση της $\delta(x-a)$ πάνω στη συνάρτηση ελέγχου $\phi(x)$ με $\delta_a\left[\phi(x)\right]$ η (9.1) γράφεται

$$\delta_a\left[\phi(x)\right] = \int_D \phi(x)\delta(x-a)dx = \begin{cases} \phi(a) & \text{αν} \ a \in D \\ 0 & \text{αν} \ a \notin D \end{cases} \tag{9.4}$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθεση της $\delta(x)$ με μια συνάρτηση $f(x)$ δηλαδή τη γενικευμένη συνάρτηση $\delta[f(x)]$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε βασιζόμενοι στην (9.4) ότι αν η $f(x)$ έχει μόνο απλές ρίζες, έστω τις $a_1, a_2, \cdots, a_N$ τότε

$$\delta[f(x)] = \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(x-a_n)}{\left|f'(a_n)\right|} \ . \tag{9.5}$$

Από αυτό τον τύπο προκύπτουν αμέσως και οι συχνά χρήσιμοι τύποι

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{9.6}$$

$$\delta[(x-a)(x-b)] = \frac{1}{|a-b|}[\delta(x-a)+\delta(x-b)]. \tag{9.7}$$

Η $\delta(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί από ακολουθίες ή οικογένειες συναρτήσεων που ενώ δεν συγκλίνουν με τη συνήθη έννοια συγκλίνουν όμως προς την $\delta(x)$. Π.χ. για την ακολουθία

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{αν} \ -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{αν} \ |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{9.8}$$

εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f_n(x)dx = \phi(0)$$

[5] Η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση ελέγχου παρά μόνο αν υποθέσουμε ότι $\phi(\pm\infty)=0$ δηλαδή ότι παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος στα σημεία $\pm\infty$.

και επομένως $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\delta(x)$. Η σχέση αυτή γενικεύεται κα στην περίπτωση που ο δείκτης *n* παίρνει συνεχείς τιμές. Αν αντικαταστήσουμε τον *n* με μια συνεχή παράμετρο *ε* τότε η προηγούμενη αναπαράσταση της $\delta(x)$ γράφεται

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) \tag{9.9}$$

όπου

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{αν } |x|<\varepsilon \\ 0 & \text{αν } |x|>\varepsilon\end{cases} \tag{9.10}$$

Άλλες γνωστές οικογένειες συναρτήσεων που αναπαριστούν τη $\delta(x)$ είναι οι

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad \text{με } \varepsilon\to 0, \tag{9.11}$$

$$f_\alpha(x)=\frac{\sin(\alpha x)}{\pi x} \quad \text{με } \alpha\to\infty. \tag{9.12}$$

Ειδικά για την οικογένεια συναρτήσεων (9.12) μπορούμε αν παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ixt}dt,$$

τότε βλέπουμε ότι η σε αυτή την περίπτωση η αναπαράσταση της $\delta(x)$ παίρνει την μορφή

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}dt. \tag{9.13}$$

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης της $\delta(x)$ είναι μέσω της παραγώγου της *συνάρτησης μοναδιαίου βήματος* $H(x)$. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως εξής:

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x<0 \\ 1 & \text{αν } x>0\end{cases} \tag{9.14}$$

Επίσης ιδιαίτερα χρήσιμη είναι και η σύνθετη συνάρτηση $H(x\text{-}a)$ με αναλυτικό τύπο:

$$H(x-a)=\begin{cases}0 & \text{αν } x<a \\ 1 & \text{αν } x>a\end{cases} \tag{9.15}$$

Εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$H'(x)=\delta(x) \ \text{ και } \ H'(x-a)=\delta(x-a). \tag{9.16}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $\delta(x-a)$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_D \phi(x)\delta'(x-a)dx=\begin{cases}-\phi'(a) & \text{αν } a\in D \\ 0 & \text{αν } a\notin D\end{cases} \tag{9.17}$$

Ο συναρτησιακός χώρος $\mathcal{F}_{\infty}$.

Ας θεωρήσουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού συνάρτησης με αριθμό συνιστά ένα *απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο*. Στον χώρο αυτό εισάγουμε ένα *βαθμωτό γινόμενο συναρτήσεων* ως εξής: Αν $f_n(x)\in\mathcal{F}_{\infty}$, $n=1,2$ τότε

$$(f_1(x), f_2(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx\,. \qquad \textbf{(9.18)}$$

Με την εισαγωγή αυτού του βαθμωτού γινομένου ο χώρος $\mathcal{F}_{\infty}$ γίνεται ένας *ερμητιανός διανυσματικός χώρος*. Το μέτρο ενός διανύσματος (δηλαδή συνάρτησης) $f(x)$ του $\mathcal{F}_{\infty}$ ορίζεται ως εξής:

$$\|f(x)\| \equiv \sqrt{(f(x), f(x))}\,. \qquad \textbf{(9.19)}$$

Για να υπάρχει όμως το μέτρο $\|f(x)\|$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)e^{ikx}dk$ θα πρέπει $\big((f(x), f(x)\big)<+\infty$ ή ισοδύναμα, θα πρέπει να συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty\,. \qquad \textbf{(9.20)}$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ του $\mathcal{F}_{\infty}$ που ικανοποιούν τον περιορισμό (9.20) λέγονται *τετραγωνικά ολοκληρώσιμες*. Οι συναρτήσεις αυτές αφού ικανοποιούν την (9.20) είναι ευνόητο ότι θα πρέπει να τείνουν «αρκούντως γρήγορα» προς το μηδέν στα δύο άκρα της πραγματικής ευθείας. Δηλαδή θα πρέπει

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,. \qquad \textbf{(9.21)}$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση $f(x)$ του χώρου $\mathcal{F}_{\infty}$ μπορεί να γραφεί σε μορφή ολοκληρώματος ως εξής:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)e^{ikx}dk\ , \qquad \textbf{(9.22)}$$

όπου

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}dx\ . \qquad \textbf{(9.23)}$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης (9.22) μπορεί να αναγνωσθεί ως μια γραμμική επαλληλία των συναρτήσεων

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\ ,\ \text{με } k\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(9.24)}$$

όπου οι συντελεστές $F(k)$ της επαλληλίας αυτής εξαρτώνται από τον συνεχή δείκτη *k*. Υπό αυτή την έννοια οι συναρτήσεις $\phi_k(x)$ συνιστούν μια βάση συναρτήσεων[6] για τον χώρο $\mathscr{F}_{\infty}$. Το γράφημα της συνάρτησης $|F(k)|$ συναρτήσει του *k* συνιστά το *φάσμα συχνοτήτων* της $f(x)$ το οποίο είναι συνεχές. Βασιζόμενοι στην σχέση (9.13) παρατηρούμε ότι οι $\phi_k(x)$ συνιστούν ένα *ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων*

$$\left(\phi_k(x), \phi_{k'}(x)\right) = \delta(k-k') \qquad \textbf{(9.25)}$$

και ότι

$$\left(\phi_k(x), \phi_k(x')\right) = \delta(x-x') \qquad \textbf{(9.26)}$$

Η εξίσωση (9.26) λέγεται *σχέση πληρότητας* διότι όταν ικανοποιείται μας εξασφαλίζει το ότι το σύστημα των συναρτήσεων $\phi_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι πλήρες, δηλαδή συνιστά μια βάση για τον χώρο $\mathscr{F}_{\infty}$.

Ο μετασχηματισμός Fourier.

Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις $F(k)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και επομένως ανήκουν στον χώρο $\mathscr{F}_{\infty}$. Γι' αυτό μπορούμε να δούμε τον τύπο (9.23) ως ένα μετασχηματισμό που στη συνάρτηση $f(x) \in \mathscr{F}_{\infty}$ αντιστοιχίζει την συνάρτηση $F(k)$. Τον μετασχηματισμό αυτό που λέγεται *μετασχηματισμός Fourier* θα τον συμβολίζουμε με το σύμβολο $\mathcal{F}$ και έτσι θα γράφουμε $F(k) \equiv \mathcal{F}\left[f(x)\right]$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{F}^{-1}$ που αντιστοιχίζει την $F(k)$ στην $f(x)$ δίνεται από τον τύπο (9.22) και λέγεται *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier*. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}\left[F(k)\right]$. Η συνάρτηση $F(k)$ λέγεται *μετασχηματισμένη Fourier* της $f(x)$, ενώ η $f(x)$ λέγεται *αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier* της $F(k)$. Αν επιβάλλουμε στην $F(k)$ να ικανοποιεί την συνθήκη $F(-k) = \bar{F}(k)$ τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η $f(x)$ γίνεται μια πραγματική συνάρτηση που εκφράζεται από το ολοκλήρωμα

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)\right] dk\,. \qquad \textbf{(9.27)}$$

όπου θέσαμε $F(k) = \sqrt{\pi/2}\left(a+ib\right)$. Το ολοκλήρωμα αυτό λέγεται *ολοκλήρωμα Fourier* και αποτελεί γενίκευση τη γνωστής μας σειράς Fourier στην περίπτωση που ο δείκτης της άθροισης παίρνει συνεχείς τιμές. Οι πραγματικοί συντελεστές $a(k)$ και $b(k)$ δίνονται από τους τύπους

[6] Αν και δεν είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου αφού δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha) \quad a(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(kx)dx \\ &\beta) \quad b(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(kx)dx \end{aligned}\right\} \qquad (9.28)$$

Οι τύποι αυτοί αναφέρονται συχνά ως: ο μεν (α) *μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνου*, ο δε (β) *μετασχηματισμός Fourier ημιτόνου*.

Οι ακόλουθες μετασχηματισμένες Fourier έχουν υπολογισθεί ως παραδείγματα στο μάθημα:

$$\mathcal{F}\left[H(x+\alpha)-H(x-\alpha)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\alpha k)}{k}\ .$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-\varepsilon|x|}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\varepsilon}{k^2+\varepsilon^2}\ ,\quad \varepsilon>0.$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}\ .$$

$$\mathcal{F}\left[\delta(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ .$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-tk^2}\right]=\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{2t}}\ ,\quad t>0\ .$$

Κατά τον υπολογισμό μετασχηματισμένων Fourier συχνά μας είναι χρήσιμη η ακόλουθη *αρχή της συμμετρίας*:

Αρχή της συμμετρίας: *Αν $F(k)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x)$ τότε η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $F(x)$ είναι η $f(-k)$.*

Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:

Έστω ότι οι $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, είναι τυχούσες συναρτήσεις στοιχεία του χώρου $\mathcal{F}_\infty$ και $F_1(k)\equiv\mathcal{F}\left[f_1(x)\right]$, $F_2(k)\equiv\mathcal{F}\left[f_2(x)\right]$, $F_3(k)\equiv\mathcal{F}\left[f_3(x)\right]$ οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες τους Fourier. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι συχνά χρήσιμες κατά τον υπολογισμό μιας μετασχηματισμένης Fourier.

1) Γραμμικότητα
   Αν λ και μ είναι δύο τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί και $f_3(x)=\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$, τότε $F_3(k)=\lambda F_1(k)+\mu F_2(k)$.

2) Μετατόπιση της ανεξάρτητης μεταβλητής
   Για ένα οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x_0 αν $f_2(x)=f_1(x-x_0)$ τότε $F_2(k)=e^{-ix_0k}F_1(k)$.

3) Διαμόρφωση της φάσης

Για ένα οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό k_0 αν $f_2(x)=e^{ik_0x}f_1(x)$ τότε $F_2(k)=F_1(k-k_0)$.

4) Scaling της ανεξάρτητης μεταβλητής
Για κάθε μη-μηδενικό πραγματικό αριθμό *a* αν $f_2(x)=f_1(ax)$ τότε

$$F_2(k)=\frac{1}{|a|}F_1\left(\frac{k}{a}\right).$$

5) Μετασχηματισμός συζυγούς μιας συνάρτησης
Αν $f_2(x)=\overline{f}_1(x)$, τότε $F_2(k)=\overline{F}_1(-k)$.

6) Μετασχηματισμένη της παραγώγου μιας συνάρτησης
Εδώ υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f_1(x)$ και οι παράγωγοί της σε όποια τάξη εμφανίζονται στις ποιο κάτω περιπτώσεις (α), (β), (γ) ανήκουν όλες στον χώρο $\mathscr{S}_\infty$.

α) Αν $f_2(x)=f_1'(x)$ τότε $F_2(k)=ikF_1(k)$.

β) Αν $f_2(x)=f_1''(x)$ τότε $F_2(k)=-k^2F_1(k)$.

γ) Γενικότερα, αν $f_2(x)=f_1^{(n)}(x)$ τότε $F_2(k)=(ik)^nF_1(k)$, με

$n=1,2,\cdots$

7) Μετασχηματισμένη της συνάρτησης $f_2(x)=x^nf_1(x)$ με $n=1,2,\cdots$
Αν $f_2(x)=x^nf_1(x)\in\mathscr{S}_\infty$ τότε $F_2(k)=i^nF_1^{(n)}(k)$

8) Συνέλιξη δύο συναρτήσεων
Η *συνέλιξη* δύο συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$(f_1*f_2)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)f_2(x-y)dy.$$

Αποδεικνύεται ότι αν $f_3(x)=(f_1*f_2)(x)$ τότε $F_3(k)=\sqrt{2\pi}F_1(k)F_2(k)$.

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή με την ονομασία *θεώρημα της συνέλιξης*.

9) Τύπος των Parseval-Plancherel
Μια τελευταία σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι αυτός διατηρεί το μέτρο. Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται με τον λεγόμενο *τύπο των Parseval-Plancherel*:

$$\|f(x)\|=\|F(k)\| \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(k)|^2dk.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Διάφορα παραδείγματα εξισώσεων από τη φυσική έχουν επιλυθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού κατά την διδασκαλία του μαθήματος. Επίσης, λυμένα παραδείγματα υπάρχουν και στις σημειώσεις που έχουν διανεμηθεί.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων : Επίκ. Καθ. Κολάσης Χαράλαμπος. «Μιγαδικός λογισμός και ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΧΩΡΟΙ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1348.