ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.
ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

1) Ένας νέος που του άρεσαν οι περιπέτειες σκαλίζοντας κάποια παλιά έγγραφα του προπάππου του ανακάλυψε ένα παλιό κιτρινισμένο από τον χρόνο κομμάτι χαρτί το οποίο αποκάλυπτε την ύπαρξη ενός θησαυρού κρυμμένου σε ένα έρημο νησάκι. Οι οδηγίες που αναγράφονταν σε αυτό για το πώς θα βρεθεί ο θησαυρός ήταν οι εξής: «*Μόλις ξεμπαρκάρεις στο νησί δεν μπορεί παρά να δεις τα δύο μοναδικά του δέντρα, μια βελανιδιά και ένα πεύκο. Αν προσέξεις καλύτερα θα δεις κάπου και μια κρεμάλα από την οποία τα παλιά χρόνια κρεμούσαν τους προδότες. Ξεκίνα από την κρεμάλα και βάδισε ίσια προς την βελανιδιά μετρώντας τα βήματά σου. Μόλις φθάσεις στην βελανιδιά στρίψε δεξιά, βάδισε τον ίδιο αριθμό βημάτων σε διεύθυνση κάθετη προς την προηγούμενη και στο τελευταίο βήμα σου μπήξε στο χώμα ένα πάσαλο. Γύρνα τώρα πίσω στην κρεμάλα και από κει βάδισε ίσια προς το πεύκο μετρώντας πάλι τα βήματά σου. Μόλις φθάσεις στο πεύκο στρίψε αριστερά και βάδισε σε κάθετη διεύθυνση τον ίδιο αριθμό βημάτων και στο τελευταίο βήμα σου μπήξε πάλι στο χώμα ένα πάσαλο. Ο θησαυρός βρίσκεται θαμμένος στο μέσο του δρόμου μεταξύ των δύο πασάλων*». Η συνέχεια της ιστορίας έχει ως εξής: Ο νέος έφυγε αμέσως για το νησί και εκεί βρήκε πράγματι την βελανιδιά και το πεύκο, όμως πουθενά δεν μπόρεσε να βρει έστω και κάποιο ίχνος της κρεμάλας. Έτσι έκανε κάποιες απεγνωσμένες προσπάθειες σκάβοντας στην τύχη εδώ και κει γύρω από τα δέντρα και αφού δεν βρήκε τίποτα εγκατέλειψε απελπισμένος το νησί. Κι' όμως, αν ο νέος ήξερε λίγο μιγαδική άλγεβρα ίσως τα κατάφερνε με λίγη σκέψη να βρει τον θησαυρό. Μήπως μπορείτε εσείς να βρείτε πώς;

Υπόδειξη: Τοποθετείστε τον πραγματικό άξονα πάνω στην ευθεία που συνδέει την βελανιδιά Β και το πεύκο Π έτσι ώστε η αρχή των αξόνων να βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΠ. Εκλέξτε την κλίμακα των αποστάσεων έτσι ώστε η θέση του πεύκου να αντιστοιχεί στο $z_\Pi = 1$ οπότε η θέση της βελανιδιάς θα δίνεται από το $z_B = -1$. Ο μιγαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στην (άγνωστη) θέση της κρεμάλας ας είναι ο z_K. Τα υπόλοιπα τα αφήνω σε σας.

2) Αν α είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $|\alpha| \neq 1$ και $\left|\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha\bar{z}}\right| = 1$, αποδείξτε ότι $|z| = 1$.

3) Προσδιορίστε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου τα οποία ορίζονται από την συνθήκη:

α) $|z+i-1| \le 3$, β) $|\arg z| < \pi/4$, γ) $z - i\bar{z} = i-1$, δ) $|z| = \arg z$.

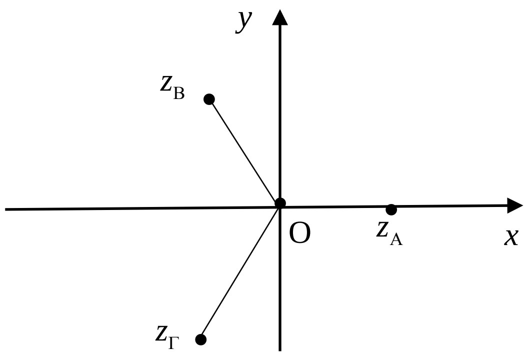
4) Έστω ότι τα σημεία A, B, C, του μιγαδικού επιπέδου είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών a, b, c αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5) Θεωρείστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Ο τέτοιο ώστε από το Ο κάθε πλευρά του τριγώνου να φαίνεται υπό γωνία 2π/3. Ζητείται να αποδείξετε ότι αν Μ είναι ένα τυχόν σημείο στην επιφάνεια του τριγώνου τότε $\mathrm{MA}+\mathrm{MB}+\mathrm{M\Gamma} \geq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{O\Gamma}$. Δηλαδή το σημείο του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από τις κορυφές του τριγώνου είναι ελάχιστο είναι το σημείο Ο. Για να το αποδείξετε τοποθετείστε το τρίγωνο ΑΒΓ στο μιγαδικό επίπεδο έτσι ώστε το Ο να αποτελεί την αρχή των αξόνων και το Α να βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα έτσι ώστε $z_{\mathrm{A}} = a$, $z_{\mathrm{B}} = be^{i2\pi/3}$, $z \ = ce^{-i2\pi/3}$ όπου $\mathrm{OA} \equiv a = |z_{\mathrm{A}}|$, $\mathrm{OB} \equiv b = |z_{\mathrm{B}}|$, $\mathrm{O\Gamma} \equiv c = |z_{\Gamma}|$. Στη συνέχεια χρησιμοποιείστε την τριγωνική ανισότητα για να δείξετε ότι

$$|z - z_{\mathrm{A}}| + |z - z_{\mathrm{B}}| + \|z - z_{\Gamma}\| \geq |z_{\mathrm{A}}| + |z_{\mathrm{B}}| + |z_{\Gamma}|,$$

όπου z τυχών μιγαδικός αριθμός.



6) Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των παραστάσεων α) $(1+i)^8$, β) $(1+\sqrt{3}i)^{-10}$

7) Χρησιμοποιείστε τον τύπο του de Moivre για να αποδείξετε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

α) $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

β) $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

8) Χρησιμοποιείστε τον τύπο του de Moivre για να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα του Lagrange

$$1+\cos\theta+\cos(2\theta)+\ldots+\cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

9) Υπολογίστε τις ρίζες των εξισώσεων:

$z^4+1=0$, $z^3=i$, $z^4-z^2+1=0$, $z^6=8$, $(z+1)^3=1-i$.