ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8

1. Υπολογίστε την μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = [\mathrm{sign}(x)]e^{-\varepsilon|x|} = \begin{cases} e^{-\varepsilon x}\ , & \text{όταν } x > 0 \\ -e^{\varepsilon x}\ , & \text{όταν } x < 0 \end{cases}\ ,\ \text{ με } \varepsilon > 0\,.$$

Εδώ $\mathrm{sign}(x)$ είναι η συνάρτηση «πρόσημο του x»

$$\mathrm{sign}(x) = H(x) - H(-x) = \begin{cases} 1\ , & \text{όταν } x > 0 \\ -1\ , & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

όπου $H(x)$ η μοναδιαία συνάρτηση βήματος (ή συνάρτηση Heaviside). Στην συνέχεια να πάρετε το όριο όταν $\varepsilon \to 0$ για να συμπεράνετε ότι η μετασχηματισμένη Fourier της $\mathrm{sign}(x)$ είναι η

$$\mathcal{F}[\mathrm{sign}(x)] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k}\ .$$

Τέλος υπολογίστε την αντίστροφη μετασχηματισμένη $\mathcal{F}^{-1}\left[1/k^2\right]$.

2. Να λύσετε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier την εξίσωση διάχυσης (ή εξίσωση διάδοσης θερμότητας)

$$u_{xx} = u_t\ ,$$

αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

<u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty,t) = 0,\ \ u(+\infty,t) = 0.$

<u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0) = \delta(x)$, όπου $\delta(x)$ η «συνάρτηση δέλτα» του Dirac.

3. Βασισθείτε στην άσκηση (1) για να δώσετε την λύση της εξίσωσης $u_{xx} = u_t$ όταν αυτή η λύση (την οποία θα συμβολίσουμε $G(x, x', t)$ ικανοποιεί τις ίδιες συνοριακές συνθήκες όπως και πριν αλλά τώρα με την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \delta(x - x')$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η λύση της εξίσωσης διάχυσης με τις συνθήκες:

   <u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty, t) = 0, \;\; u(+\infty, t) = 0$.

   <u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0) = f(x)$,

   γράφεται:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x', t)\, f(x')\, dx'$$

   όπου η συνάρτηση $G(x, x', t)$ λέγεται <u>συνάρτηση εξέλιξης</u> (ή και <u>συνάρτηση Green</u> του προβλήματος.

4. Λύστε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_x + u_t + 2u = 0, \;\; \text{με} \;\; -\infty < x < +\infty, \;\; 0 < t < +\infty.$$

   <u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty, t) = 0, \;\; u(+\infty, t) = 0$.

   <u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \\ e^{-x} & \text{αν } x > 0 \end{cases}$, με $-\infty < x < +\infty$.

5. Να λύσετε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier την μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$u_{tt} = u_{xx} \; , \;\; \text{με} \;\; -\infty < x < +\infty \; ,$$

   αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty,t)=0,\ \ u(+\infty,t)=0$.

Αρχικές συνθήκες: $u(x,0)=e^{-x^2}$, και $u_t(x,0)=0$.

6. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$u_{xx}+u_x=u_t\ ,\quad \text{με}\ -\infty<x<+\infty\ ,\ \ 0\le t<+\infty\ ,$$

όταν αυτή συνοδεύεται από τις συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty,t)=0,\ \ u(+\infty,t)=0.$

Αρχική συνθήκη: $u(x,0)=e^{-x^2}$.

7. Να λύσετε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier τη διαφορική εξίσωση

$$u_{xx}-u_x=u_t-u\ ,\ \text{με}\ -\infty<x<+\infty\ ,\ \ 0\le t<+\infty\ ,$$

αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty,t)=0,\ \ u(+\infty,t)=0.$

Αρχική συνθήκη: $u(x,0)=\delta(x)$.

8. Να λύσετε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\quad \text{με}\ -\infty<x<+\infty\ ,\ \ 0\le t<+\infty$$

αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty,t)=0,\ \ u(+\infty,t)=0.$

<u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$.

9. Δίνεται η μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}+u=f(x)$$

με τις συνοριακές συνθήκες $\lim_{x\to\pm\infty}u(x)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Για να την λύσετε εφαρμόστε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier. Η τελική μορφή της λύσης $u(x)$ θα δοθεί με την βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης.

10. Να λύσετε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2t\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}\ , \quad \text{με} \quad -\infty<x<+\infty\ ,\ 0\le t<+\infty\ ,$$

αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

<u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty,t)=0,\ \ u(+\infty,t)=0.$

<u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0)=f(x)$.