

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.**  
**ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010**

**ΘΕΜΑ 1.**

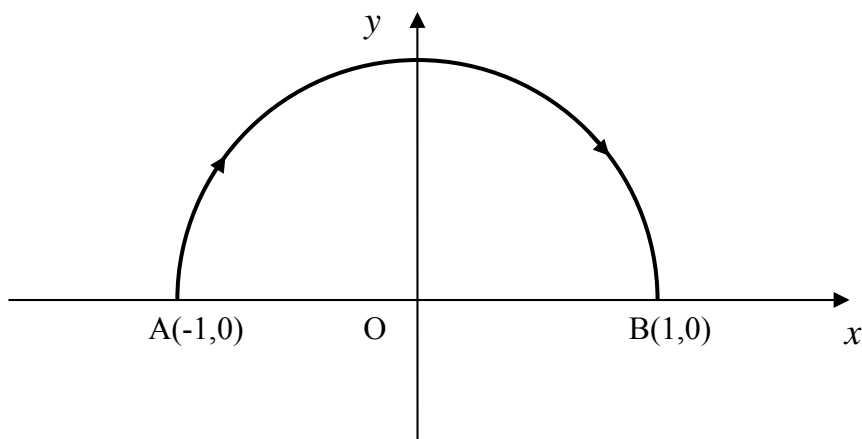
Δίνονται οι συναρτήσεις  $f_1(z) = z\bar{z}^2 - 2\bar{z}$  και  $f_2(z) = 1 + \pi \sin(i\pi z)$  όπου  $z = x + iy$ .

α) Ποια είναι τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες και ποια τα σημεία (αν υπάρχουν) που είναι αναλυτικές; Δώστε την παράγωγο των  $f_1$  και  $f_2$  στα σημεία που είναι παραγωγίσιμες. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).

β) Υπολογίστε τα δρομικά ολοκληρώματα

$$a = \int_C f_1(z) dz \quad \text{και} \quad b = \int_C f_2(z) dz$$

όπου  $C$  ο ημικυκλικός δρόμος με κέντρο την αρχή  $O$  που ξεκινά από το σημείο  $A(-1,0)$  και καταλήγει στο σημείο  $B(1,0)$ .



γ) Τέλος, υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_{C_1} \frac{\cos z}{(z-a)(z-b)} dz$  όπου  $C_1$

είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος  $|z|=1$  και  $a, b$  οι ποσότητες που αναφέρονται στο προηγούμενο ερώτημα (β).

**ΘΕΜΑ 2.**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = \frac{2z^2 - 5z + 6}{z(z-1)(z-2)} \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{2z^2 - 5z + 6}{z(z-1)(z-2)} \cos(\pi z^2).$$

- α) Το ανάπτυγμα της  $f_1(z)$  σε σειρά δυνάμεων του  $z$  στο χωρίο  $1 < |z| < 2$  είναι ένα ανάπτυγμα Laurent ή ένα ανάπτυγμα MacLaurin; Υπολογίστε αυτό το ανάπτυγμα.
- β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C f_2(z) dz$$

όπου  $C$  είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος  $|2z - 1| = 2$ .

**ΘΕΜΑ 3.** Χρησιμοποιείτε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \sin(\sqrt{2}\pi x) dx.$$

**ΘΕΜΑ 4.**

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0,$$

η οποία υπόκειται στις εξής συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες:  $u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0$

Αρχική συνθήκη:  $u(x, 0) \equiv f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{-2x} & \text{αν } x > 0 \end{cases}.$

- α) Υπολογίστε την μετασχηματισμένη Fourier  $F(k)$  της συνάρτησης  $f(x)$ .
- β) Λύστε την διαφορική εξίσωση με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier.