ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1.

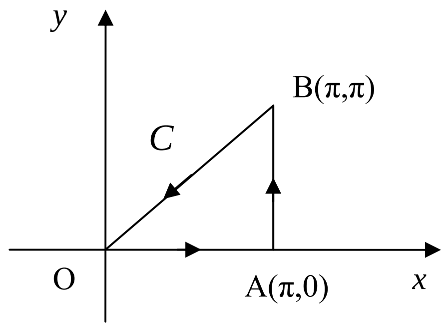
Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = xe^{iy}$ και $f_2(z) = \dfrac{\cos z}{z^3 + i}$ όπου $z = x + iy$.

α) Ποια είναι τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες και ποια τα σημεία (αν υπάρχουν) που είναι αναλυτικές; Δώστε την παράγωγο των f_1 και f_2 στα σημεία που είναι παραγωγίσιμες. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).

β) Υπολογίστε τα δρομικά ολοκληρώματα

$$a = \int_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad b = \int_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος τριγωνικός βρόχος OAB του σχήματος.



ΘΕΜΑ 2.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad f_2(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

α) Εξηγείστε γιατί το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $1 < |z| < 2$ της συνάρτησης $f_1(z)$ είναι ένα ανάπτυγμα Laurent. Δώστε αυτό το ανάπτυγμα.

β) Εξηγείστε γιατί η $f_2(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά MacLaurin .Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους αυτού του αναπτύγματος.

γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}dz$ όπου C είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z-2|=2$.

ΘΕΜΑ 3.

Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$,   β) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$.

ΘΕΜΑ 4.

Να λύσετε με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Fourier τη διαφορική εξίσωση θερμότητας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} ,$$

αν $u(x,0)=\delta(x)$ όπου $\delta(x)$ η ¨συνάρτηση δέλτα¨ του Dirac και $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=0$.