ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Η $f_1(z)$ έχει πραγματικό μέρος $u(x,y)=y^2\cos x$ και φανταστικό μέρος $v(x,y)=-y^2\sin x$, όπου $z=x+iy$. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η $f_1(z)$ έχει παράγωγο σε κάποιο σημείο $z=x+iy$ αν σε αυτό το σημείο οι πρώτες μερικές παράγωγοι των $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι συνεχείς και ικανοποιούνται εκεί οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Για την $f_1(z)$ έχουμε $u_x=-y^2\sin x$, $v_x=-y^2\cos x$, $u_y=2y\cos x$, $v_y=-2y\sin x$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι προφανώς συνεχείς σε όλα τα σημεία του επιπέδου x,y και επομένως η $f_1(z)$ θα έχει παράγωγο μόνο στα σημεία που ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$. Στην περίπτωσή μας οι εξισώσεις αυτές είναι ισοδύναμες με την $y^2=2y$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $f_1(z)$ έχει παράγωγο μόνο πάνω στις ευθείες ($y=2$, $x\in\Re$) και ($y=0, x\in\Re$) ή ισοδύναμα πάνω στην ευθεία $z=2$ με $\operatorname{Re} z\in\Re$ και στην ευθεία $z=0$ με $\operatorname{Re} z\in\Re$. Στα σημεία αυτά η παράγωγος γράφεται:

Για την ευθεία $z=2$ με $x\in\Re$:
$$f_1'(z)=u_x+iv_x\Big\|_{z=2}=-4\sin x-i4\cos x=-4ie^{-ix}.$$

Για την ευθεία $z=0$ με $x\in\Re$: $f_1'(z)=u_x+iv_x\Big\|_{z=0}=0$.

Αν θεωρήσουμε μια γειτονιά ενός οποιουδήποτε σημείου αυτής της ευθείας διαπιστώνουμε ότι πάντα υπάρχουν σημεία αυτής της γειτονιάς που δεν ανήκουν στην ευθεία και βέβαια σε αυτά τα σημεία η $f_1(z)$ δεν έχει παράγωγο. Άρα η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

Ας εξετάσουμε τώρα την $f_2(z)$. Η συνάρτηση $\cos z$ είναι ως γνωστόν ακεραία αναλυτική. Επομένως η $f_2(z)$ είναι αναλυτική (και παραγωγίσιμη βέβαια) σε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία για τα οποία $4\cos z-5=0$. Θέτουμε $w\equiv e^{iz}$ (οπότε $iz=\log w$ ή ισοδύναμα, $z=-i\log w$) και η εξίσωση αυτή γράφεται $2(w+w^{-1})-5=0$, ή ισοδύναμα $2w^2-5w+2=0$, με ρίζες τις $w_1=1/2$, και $w_2=2$. Παρατηρούμε ότι η $f_2(z)$ δεν είναι αναλυτική σε μια απειρία σημείων z_{n_1} και z_{n_2} τα οποία είναι απλοί πόλοι (διότι είναι απλές ρίζες της $4\cos z-5=0$) και δίνονται από τις σχέσεις

$z_{n_1}=-i\log w_1=i\ln 2+2n_1\pi$, $z_{n_2}=-i\log w_2=-i\ln 2+2n_2\pi$, όπου n_1 και n_2 τυχόντες ακέραιοι αριθμοί.

β) <u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> $\oint\limits_C f_1(z)dz$:

Καταρχήν γράφουμε τις παραμετρικές εξισώσεις των δρόμων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ.

Δρόμος ΑΒ: $z(y)=2+iy,$ με $0\le y\le 2$. Εδώ $x=2$ και $f_1[z(y)]=y^2e^{-2i}$

Δρόμος ΒΓ: $z(x)=x+2i,$ με $-2\le x\le 2$. Εδώ $y=2$ και $f_1[z(x)]=4e^{-ix}$.

Δρόμος ΓΔ: $z(y)=-2+iy$, με $0\le y\le 2$. Εδώ $x=-2$ και $f_1[z(y)]=y^2e^{2i}$.

Δρόμος ΔΑ: $z(x)=x,$ με $-2\le x\le 2$. Εδώ $y=0$ και $f_1[z(x)]=0$.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε ξεχωριστά τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω στους δρόμους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ.

$$\int\limits_{AB} f_1(z)dz=\int_0^2 y^2e^{-2i}idy=ie^{-2i}\left.\frac{y^3}{3}\right\|_0^2=\frac{8}{3}ie^{-2i}=\frac{8}{3}(\sin 2+i\cos 2).$$

$$\int\limits_{\mathrm{B\Gamma}} f_1(z)dz=\int_2^{-2} 4e^{-ix}dx=4i(e^{2i}-e^{-2i})=-8\sin 2.$$

$$\int\limits_{\Gamma\Delta} f_1(z)dz=\int_2^0 y^2e^{2i}idy=i(-1+2i)\left.\frac{y^3}{3}\right\|_1^0=-\frac{8}{3}ie^{2i}=\frac{8}{3}(\sin 2-i\cos 2).$$

$$\int_{\Delta A} f_1(z)dz = \int_{-2}^{2} 0dx = 0$$

Τελικά

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{AB} f_1(z)dz + \int_{B\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma\Delta} f_1(z)dz + \int_{\Delta A} f_1(z)dz = -\frac{8}{3}\sin 2 \ .$$

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> $\oint_C f_2(z)dz$:

'Όλα τα σημεία z_{n_2} βρίσκονται στο εξωτερικό του βρόχου C ενώ από τα z_{n_1} μόνο το $z_0 = i\ln 2$ που είναι απλός πόλος βρίσκεται στο εσωτερικό του C. Επομένως εφαρμόζουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων και έχουμε:

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) \ ,$$

όπου $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) = \left.\dfrac{4z}{(4\cos z - 5)'}\right\|_{z=z_0} = \dfrac{4z_0}{-4\sin z_0} = -\dfrac{i\ln 2}{\sin(i\ln 2)}.$

Όμως $\sin(i\ln 2) = \dfrac{e^{i(i\ln 2)} - e^{-i(i\ln 2)}}{2i} = \dfrac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2i} = \dfrac{\frac{1}{2} - 2}{2i} = \dfrac{3}{4}i$, οπότε

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) = -\frac{4}{3}\ln 2 .$$

Τελικά $\oint_C f_2(z) = 2\pi i\left(-\dfrac{4}{3}\ln 2\right) = -i\dfrac{8\pi}{3}\ln 2 .$

ΘΕΜΑ 2.

α) Η $f_1(z)$ έχει προφανώς δύο μεμονωμένα ανώμαλα σημεία, το $z_1 = 1$ που είναι διπλός πόλος και το $z_2 = 2$ που είναι απλός πόλος. Επειδή το σημείο z_1 βρίσκεται στον εσωτερικό δίσκο $|z| \geq 1$ του δακτυλιοειδούς χωρίου $1 < |z| < 2$ το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε αυτό το χωρίο θα είναι ένα ανάπτυγμα Laurent. Για τον υπολογισμό του αναπτύγματος αναλύουμε πρώτα την $f_1(z)$ σε απλά κλάσματα:

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}.$$

Στην συνέχεια τα απλά κλάσματα αναπτύσσονται στο δακτυλιοειδές χωρίο ως εξής:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \text{ διότι } |z/2|<1.$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}, \text{ διότι } |1/z|<1.$$

Η τελευταία αυτή σειρά μπορεί να παραγωγισθεί όρο προς όρο στο χωρίο $|1/z|<1$ και η παραγωγισμένη σειρά θα συγκλίνει προς την $(1/z-1)' = -1/(z-1)^2$ στο ίδιο χωρίο (βλέπε σημειώσεις Θεώρημα 6.8, σελ.44). Θα έχουμε λοιπόν

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}, \;\Rightarrow\; \frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{z^n}.$$

Τελικά το ζητούμενο ανάπτυγμα σε σειρά Laurent γράφεται

$$f_2(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{z^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z^n} + \frac{n-1}{z^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{z^n}$$

β) Η $f_2(z)$ είναι προφανώς αναλυτική στο σημείο $z=0$ (αρχή των αξόνων) και επομένως αναπτύσσεται σε σειρά MacLaurin. Η ακτίνα σύγκλισης ισούται με την απόσταση του πλησιέστερου προς την αρχή ανώμαλου σημείου της $f_2(z)$. Τα ανώμαλα σημεία της $f_2(z)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2-e^z=0$. Τα σημεία αυτά είναι άπειρα στο πλήθος και γράφονται $z_n = \log 2 = \ln 2 + i2n\pi$, όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Από αυτά το πλησιέστερο προς την αρχή είναι το σημείο $z_0 = \ln 2$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της σειράς MacLaurin ισούται με $\ln 2$.

Ο υπολογισμός των τριών πρώτων όρων της σειράς μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

<u>Πρώτος τρόπος:</u>

Επειδή η $f_2(z)$ αναλύεται σε σειρά MacLaurin γράφουμε

$$f_2(z) = \frac{e^z}{2 - e^z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Η σχέση αυτή με την βοήθεια του γνωστού αναπτύγματος MacLaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots$$

γράφεται ισοδύναμα και στην μορφή

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)\left(1 - z - \frac{z^2}{2} - \cdots\right).$$

Εκτελούμε τις πράξεις στο δεξί μέλος διατηρώντας μόνο τους όρους που περιέχουν το z^n με $n \le 2$ και παίρνουμε

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots = a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1 - \frac{a_0}{2})z^2 + \cdots$$

Έτσι καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα

$$a_0 = 1, \quad a_1 - a_0 = 1, \quad a_2 - a_1 - \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2},$$

του οποίου η λύση είναι $a_0 = 1, \ a_1 = 2, \ a_2 = 3$.

Τελικά η ζητούμενη σειρά MacLaurin γράφεται

$$f_2(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$$

<u>Δεύτερος τρόπος</u>:

Αφού η $f_2(z)$ δέχεται ανάπτυγμα MacLaurin θα έχουμε

$$f_2(z) = f_2(0) + f_2'(0)z + \frac{1}{2} f_2''(0)z^2 + \cdots$$

Εδώ ο υπολογισμός των συντελεστών της σειράς δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία[1]. Βρίσκουμε ότι

$$f_2(0) = 1,$$

$$f_2'(z) = \frac{2e^z}{(2-e^z)^2} \quad \Rightarrow \; f_2'(0) = 2,$$

$$f_2''(z) = 2\frac{e^z(e^z+2)}{(2-e^z)^3} \quad \Rightarrow \; f_2''(0) = 6,$$

οπότε καταλήγουμε πάλι στον τύπο $f_2(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - i}$

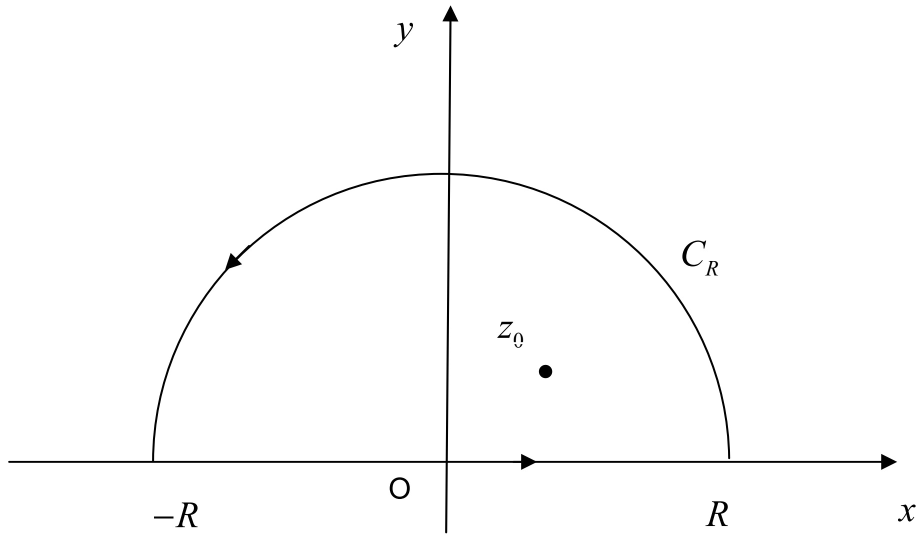
και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου O και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $g(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δύο ρίζες της εξίσωσης $z^2 - i = 0$. Οι ρίζες αυτές που είναι απλές υπολογίζονται εύκολα αν επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση σε πολική (ή τριγωνομετρική) μορφή. Επειδή προφανώς $|z| = 1$ θέτουμε $z = e^{i\theta}$ και επειδή ένα από τα ορίσματα του i είναι το $\pi/2$ η εξίσωση γράφεται $e^{2i\theta} = e^{i\pi/2}$ από όπου

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ με } k\text{=ακέραιος.}$$

Οι δύο ρίζες προκύπτουν από δύο διαδοχικές τιμές του k έστω τις $k = 0$ και $k = -1$. Για $k = 0$ παίρνουμε $\theta_0 = \pi/4$ οπότε $z_0 = e^{i\pi/4}$, ενώ για

[1] Σημειώστε ότι για μια άλλη συνάρτηση που ο υπολογισμός των παραγώγων της θα ήταν ποιο χρονοβόρος ο πρώτος τρόπος υπολογισμού μπορεί να είναι προτιμότερος.

$k=-1$ παίρνουμε $\theta_1=-3\pi/4$. Παρατηρούμε ότι από αυτές μόνο η z_0 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y>0$) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των x. Αν δε $R>1$ το σημείο z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου C.



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C με $R>1$ και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz=\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) \qquad (3.1)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_0 (που είναι απλός πόλος της $f(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\left.\frac{1}{z^2-i}\right\|_{z=i}=\left.\frac{1}{(z^2-i)'}\right\|_{z=z_0}=\frac{1}{2z_0}=\frac{1}{2}e^{-i\pi/4}=\frac{1-i}{2\sqrt{2}}$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i)\,. \qquad (3.2)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R$) ισχύει η ανισότητα:

$$\left|z^2 - \imath\right| \geq \left|\left|z^2\right| - |\imath|\right| = \left|R^2 - 1\right| = R^2 - 1$$

Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2 - i}\right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Darboux για την $f(z)$ και τον δρόμο C_R λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος του C_R είναι πR και παίρνουμε

$$0 \leq \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \pi R \frac{1}{R^2 - 1} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz\right| = 0$$

Αλλά τότε και

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Από την σχέση (3.2) προκύπτει τώρα ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - i}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i)$$

Όμως η συνάρτηση $f(x) = 1/(x^2 - i)$ είναι άρτια οπότε

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - i} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+i).$$

β) Το ολοκλήρωμα αυτό εντάσσεται στην γενική κατηγορία των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Δηλαδή το αρχικό πραγματικό ολοκλήρωμα θα προκύπτει σαν η παραμετροποίηση αυτού του δρομικού ολοκληρώματος.

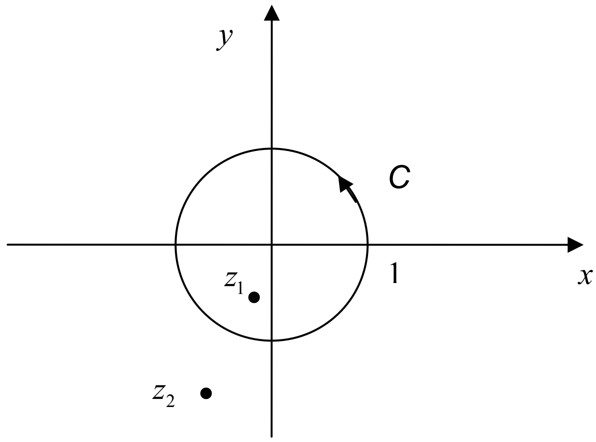
Πάνω στον μοναδιαίο κύκλο C με κέντρο την αρχή θα έχουμε λοιπόν $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z - z^{-1})2i$ και $d\theta = dz / iz$. Έτσι το προτεινόμενο προς υπολογισμό ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή του δρομικού ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \oint_C \frac{\frac{1}{iz}}{3 + \frac{z + z^{-1}}{2} + 2\frac{z - z^{-1}}{2i}} dz = \oint_C \frac{2}{(2+i)z^2 + 6iz + i - 2} dz$$

Εδώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι ρητή και επομένως αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή που είναι πόλοι. Οι ρίζες αυτές υπολογίζονται εύκολα (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) και είναι

$$\frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 - (2+i)(i-2)}}{2+i} = \frac{-3i \pm 2i}{2+i} = \frac{1}{5}(1+2i)(-3 \pm 2)$$

Δηλαδή έχουμε τις ρίζες $z_1 = -\frac{1}{5}(1+2i)$ και $z_2 = -1 - 2i$. Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος C έχει κέντρο την αρχή, για να ελέγξουμε αν τα σημεία που αντιστοιχούν στους z_1 και z_2 βρίσκονται εντός ή εκτός του C δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τα μέτρα $|z_1|$ και $|z_2|$. Επειδή λοιπόν $|z_1| = \frac{1}{5}|1+2i| = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$, και $|z_2| = |1+2i| = \sqrt{5} > 1$, συμπεραίνουμε ότι μόνο το z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του C.



Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε

$$\mathrm{I} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left[\frac{2}{(2+i)z^2+6iz+i-2}\right] = 2\pi i \frac{2}{2(2+i)z_1+6i} = \frac{2\pi i}{-(2+i)\dfrac{1+2i}{5}+3i} = \pi$$

Τελικά

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta} = \pi .$$

ΘΕΜΑ 4.

Ας συμβολίσουμε με $U(k,t)$ την μετασχηματισμένη Fourier (ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) της προς προσδιορισμό συνάρτησης $u(x,t)$. Δηλαδή

$$\mathcal{F}[u(x,t)] \equiv U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx .$$

Αν δράσουμε πάνω στην εξίσωση με τον μετασχηματισμό Fourier F και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα μετασχηματισμού της παραγώγου (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.12) παίρνουμε

$$-k^2 U - ikU = \frac{\partial U}{\partial t} - U ,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -(k^2+ik-1)U ,$$

της οποίας η ολοκλήρωση μας δίνει

$$U(k,t) = U(k,0)e^{-(k^2+ik-1)t} .$$

όμως από την αρχική συνθήκη $u(x,0)=\delta(x)$ προκύπτει ότι (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», *Παράδειγμα 3* σελ.10)

$$U(k,0)=\mathcal{F}[u(x,0)]=\mathcal{F}[\delta(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

και έτσι

$$U(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(k^2+ik-1)t}.$$

Η ζητούμενη λύση προκύπτει με την βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[U(k,t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}[e^{-(k^2+ik-1)t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(k^2+ik-1)t}e^{ikx}dk\,,$$

Δηλαδή

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-[tk^2+i(t-x)-t]}dk\,.$$

Ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος μπορεί να γίνει εύκολα αν βασισθούμε στο γνωστό ολοκλήρωμα του Gauss[2]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\,.$$

Καταρχήν συμπληρώνουμε το τετράγωνο στον εκθέτη γράφοντας:

$$tk^2+i(t-x)k-t=\left(\sqrt{t}k+i\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\right)^2+\frac{(t-x)^2}{4t}-t\,,$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

---

[2] Επί τούτου δείτε και στο «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού» *Παράδειγμα 4* σελ.11.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{t - \frac{(t-x)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{t}k + i\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dk \,.$$

Με την αλλαγή $k \to \lambda = \sqrt{t}k + i\dfrac{t-x}{2\sqrt{t}}$ στην μεταβλητή ολοκλήρωσης παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{t}k + i\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dk = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \,.$$

Τελικά η ζητούμενη λύση γράφεται

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t - \frac{(t-x)^2}{4t}} \,.$$