ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2011

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Δείτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.12

β) Ας είναι $u(x,y)=x+\cos(\pi y)$ και $v(x,y)=y-\cos(\pi x)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $f_1(z)$. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των $u(x,y)$ και $v(x,y)$ γράφονται

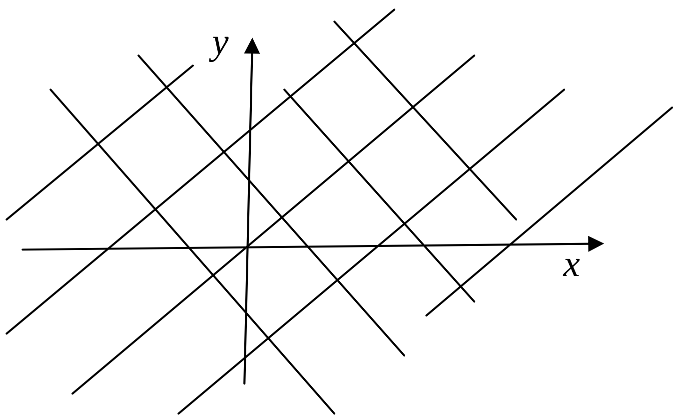
$u_x = 1$, $u_y = -\pi\sin(\pi y)$, $v_x = \pi\sin(\pi x)$, $v_y = 1$,

και είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x,y*. Επομένως, η $f_1(z)$ θα παραγωγίζεται στα σημεία που ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Αυτές μας δίνουν

$u_x = v_y \;\Rightarrow\; 1=1$,

$u_y = -v_x \;\Rightarrow\; -\pi\sin(\pi y) = -\pi\sin(\pi x)$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι θα υπάρχει η παράγωγος στα σημεία στα οποία $\sin(\pi y)=\sin(\pi x)$ δηλαδή στα σημεία που $y = x+2k$ ή στα σημεία που $y=-x+2k+1$, με $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Τα σημεία αυτά ορίζουν στο μιγαδικό επίπεδο δύο ορθογώνιες μεταξύ τους οικογένειες ευθειών όπως φαίνεται στο σχήμα



Πάνω σε αυτές τις ευθείες η $f_1(z)$ έχει παράγωγο που δίνεται από την σχέση $f_1'(z) = u_x + iv_x = 1 + i\pi\sin(\pi x)$. Όμως, η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία αυτών των δύο ευθειών παρά του ότι εκεί παραγωγίζεται. Αυτό γιατί όποια γειτονιά ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στις ευθείες κι' αν θεωρήσουμε θα υπάρχουν σημεία μέσα στην γειτονιά που δεν ανήκουν στις ευθείες και σε αυτά η συνάρτηση δεν θα παραγωγίζεται. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η $f_1(z)$ είναι παραγωγίσιμη πάνω στις δύο οικογένειες ευθειών $y = x + 2k$ και $y = -x + 2k + 1$ με $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ενώ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

Η συνάρτηση τώρα $f_2(z)$ είναι το πηλίκο δύο ακέραιων αναλυτικών συναρτήσεων και ως εκ τούτου είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Τα σημεία αυτά είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\sqrt{2}z^2 = 1 + i$. Η εξίσωση λύνεται εύκολα σε πολικές συντεταγμένες. Επειδή $(1+i)/\sqrt{2} = e^{i\pi/4}$ και $|z| = 1$ θέτουμε $z = e^{i\theta}$ και καταλήγουμε στην εξίσωση $e^{2i\theta} = e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$. Από αυτή παίρνουμε $\theta = \pi/8 + k\pi$ με $k = 0,1$. Οι δύο ρίζες γράφονται $z_1 = e^{i\pi/8}$, $z_2 = e^{i[(\pi/8)+\pi]} = -e^{i\pi/8}$.

γ) <u>Υπολογισμός του</u> $\oint_C f_1(z)dz$.

Επειδή η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο είμαστε αναγκασμένοι για τον υπολογισμό του δρομικού ολοκληρώματος να προχωρήσουμε σε παραμετροποίηση. Ο τριγωνικός βρόχος *C* αποτελείται από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα OA, AB, BO. Η παραμετρική εξίσωση για καθένα από αυτά έχει ως εξής:

Για το OA: Εδώ $y = x$ και άρα $z(x) = (1+i)x$, με $0 \le x \le 2$. Ενώ
$f_2(z) = x + \cos(\pi x) + i\left[x - \cos(\pi x)\right] = (1+i)x + (1-i)\cos(\pi x)$.

Για το AB: Εδώ $y = 2$ και άρα $z(x) = x + 2i$, με $0 \le x \le 2$. Ενώ
$f_2(z) = x + \cos(2\pi) + i\left[2 - \cos(\pi x)\right] = x + 1 + i\left[2 - \cos(\pi x)\right]$.

Για το BO: Εδώ $x = 0$ και άρα $z(y) = iy$ με $0 \le y \le 2$. Ενώ
$f_2(z) = \cos(\pi y) + i(y-1)$.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα θα είναι:

$$\int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz = \int_0^2 \left[(1+i)x + (1-i)\cos(\pi x)\right](1+i)dx = \int_0^2 \left[2ix + 2\cos(\pi x)\right]dx = 4i$$

$$\int_{\mathrm{AB}} f_1(z)dz = \int_2^0 \left\{x + 1 + i\left[2 - \cos(\pi x)\right]\right\} dx = -4 - 4i\,.$$

$$\int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz = \int_2^0 \left[\cos(\pi y) + i(y-1)\right] i dy = \int_2^0 \left[1 - y + i\cos(\pi y)\right] dy = 0\,.$$

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz + \int_{\mathrm{AB}} f_1(z)dz + \int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz = 4i - 4 - 4i + 0 = -4\,.$$

<u>Υπολογισμός του</u> $\int_C f_2(z)dz$.

Οι δύο πόλοι $z_1 = e^{i\pi/8}$ και $z_2 = -e^{i\pi/8}$ βρίσκονται έξω από τον βρόχο C. Αφού λοιπόν η $f_2(z)$ είναι αναλυτική παντού πάνω και στο εσωτερικό του C βάσει του θεωρήματος Cauchy-Goursat θα έχουμε

$$\oint_C f_2(z)dz = 0\,.$$

ΘΕΜΑ 2.

α) Το χωρίο $1 < |z| < 2$ είναι ένα δακτυλιοειδές χωρίο που στο εσωτερικό του δηλαδή στο χωρίο $|z| \le 1$ υπάρχουν δύο ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Επομένως το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z της $f(z)$ σε αυτό το χωρίο δεν μπορεί να είναι ένα ανάπτυγμα Taylor αλλά θα είναι ένα ανάπτυγμα Laurent. Για τον υπολογισμό του αναλύουμε αρχικά την ρητή συνάρτηση $1/(z-1)(z-2)$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\,.$$

Καθένα από αυτά τα απλά κλάσματα στο χωρίο $1 < |z| < 2$ αναπτύσσεται ως εξής:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}.$$

Επομένως το ζητούμενο ανάπτυγμα Laurent γράφεται

$$f(z)=\frac{2}{z}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}\right)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n}}=$$
$$=-\frac{1}{z}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n}}=-\frac{1}{z}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}.$$

Το ανάπτυγμα της $f(z)$ θα είναι ένα ανάπτυγμα Taylor στο εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου όπου η $f(z)$ θα είναι αναλυτική. Υπάρχουν άπειροι τέτοιοι δίσκοι. Π.χ. ο δίσκος $|2z-1|<1$, ο δίσκος $|z-3|<1$, ο δίσκος $|z-5|<3$, κλπ.

β) Η συνάρτηση $f(z)$ δεν εμπίπτει στις δύο κατηγορίες συναρτήσεων για τις οποίες όπως είδαμε στο μάθημα μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω ενός τύπου το ολοκληρωτικό υπόλοιπο. Θα πρέπει λοιπόν για τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου σε ένα σημείο z_0 όπου η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική να ανατρέξουμε στο ανάπτυγμα Laurent σε μια τρυπημένη γειτονιά του z_0. Παρατηρούμε ότι η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική μόνο στο σημείο $z_0=0$.

Στο σημείο $z_0=2$ το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι προφανώς μηδέν αφού σε αυτό η $f(z)$ είναι αναλυτική.

Για το σημείο $z_0=0$ όπου η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent στο χωρίο $|z|>0$:

$$f(z)=(z^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=z^2+z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=$$

$$=z^2+z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=z^2+z+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+2)!}-1\right]\frac{1}{z^n}\ .$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο ανάπτυγμα είναι $(1/3!)-1=(1/6)-1=-5/6$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=-\frac{5}{6}.$$

ΘΕΜΑ 3.

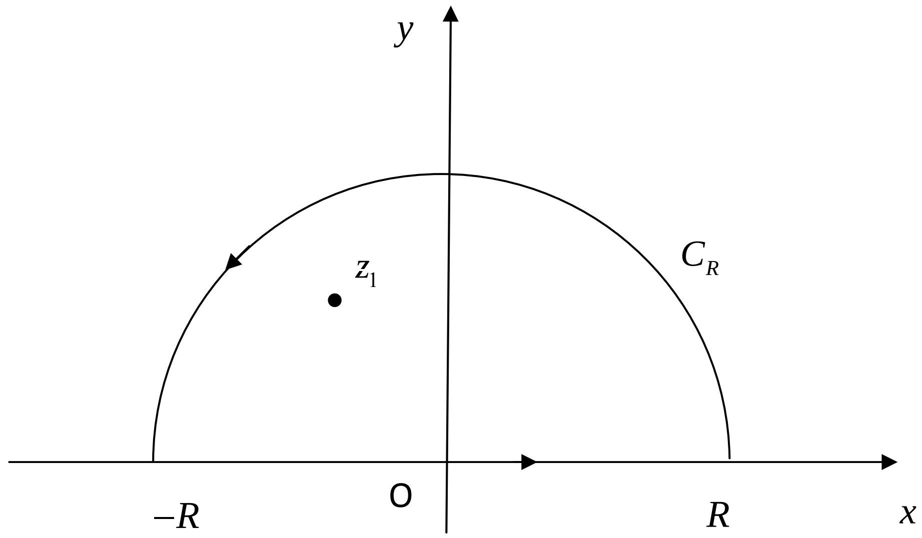
α) Υπολογισμός του $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\displaystyle f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δύο ρίζες της εξίσωσης $z^2+z+1=0$. Οι ρίζες αυτές γράφονται

$$z_1=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right),\ \text{ και }\ z_2=-\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

Παρατηρούμε ότι από αυτές μόνο η z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y>0$) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των x. Αν δε $R>1$ το σημείο z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου C.



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C με $R>1$ και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z). \qquad (3.1)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_1 (που είναι απλός πόλος της $f(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}\Bigg\|_{z=z_1} = \frac{1}{(z^2+z+1)'}\Bigg\|_{z=z_1} = \frac{1}{2z_1+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \qquad (3.2)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Πράγματι, επικαλούμενοι την τριγωνική ανισότητα και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$|z_1|=|z_2|=1$ παρατηρούμε ότι πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z|=R$) θα ισχύει η ανισότητα:

$$\left|z^2+z+1\right|=\left|(z-z_1)(z-z_2)\right|\geq \left||z|-|z_1|\right|\left||z|-|z_2|\right|=\left(R-1\right)^2$$

Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{z^2+z+1}\right|\leq\frac{1}{\left(R-1\right)^2}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Darboux για την $f(z)$ και τον δρόμο C_R λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος του C_R είναι πR και παίρνουμε

$$0\leq\left|\int_{C_R} f(z)dz\right|\leq \pi R\frac{1}{\left(R-1\right)^2}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right|=\left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz\right|=0$$

Αλλά τότε και

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0.$$

Από την σχέση (3.2) προκύπτει τώρα ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

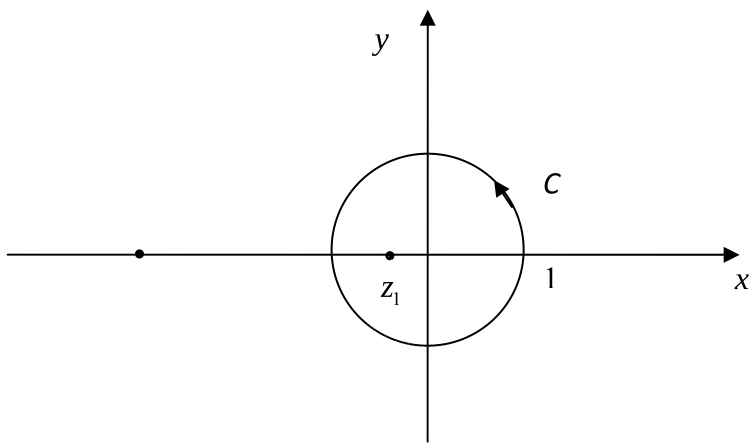
<u>Υπολογισμός του</u> $\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Το ολοκλήρωμα αυτό εντάσσεται στην γενική κατηγορία των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi}F(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $z(\theta)=e^{i\theta},\ 0\leq\theta\leq 2\pi$. Δηλαδή το αρχικό πραγματικό ολοκλήρωμα θα προκύπτει σαν η παραμετροποίηση αυτού του δρομικού ολοκληρώματος.

Πάνω στον μοναδιαίο κύκλο C με κέντρο την αρχή θα έχουμε λοιπόν $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ και $d\theta = dz/iz$. Έτσι το προτεινόμενο προς υπολογισμό ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή του δρομικού ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \oint_C \frac{1}{2 + \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}$$

Εδώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο προσανατολισμένο κατά την θετική φορά είναι ρητή και επομένως αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή που είναι απλοί πόλοι. Αυτές υπολογίζονται εύκολα (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) και είναι $z_1 = \sqrt{3} - 2$ και $z_2 = -\sqrt{3} - 2$. Παρατηρούμε ότι μόνο η z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του C.



Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε

$$\mathrm{I} = \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} = 4\pi \frac{1}{2z_1 + 4} = \frac{4\pi}{2\sqrt{3} - 4 + 4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Τελικά

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Λόγω της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[-e^{-x}H(x)+\delta(x)\right] = -\mathcal{F}\left[e^{-x}H(x)\right] + \mathcal{F}\left[\delta(x)\right] \qquad (4.1)$$

Οι δύο μετασχηματισμένες Fourier στο δεξί μέλος υπολογίζονται απευθείας από τον ορισμό του μετασχηματισμού ως εξής:

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}[e^{-x}H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}H(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-(1+ik)x}}{1+ik}\Bigg\|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+ik}$$

Βρήκαμε λοιπόν ότι:

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (4.2)$$

και αντίστροφα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(x), \qquad (4.3)$$

$$\mathcal{F}[e^{-x}H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+ik}, \qquad (4.4)$$

και αντίστροφα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+ik}\right] = e^{-x}H(x). \qquad (4.5)$$

Επιστρέφουμε τώρα στην (4.1) για να γράψουμε με την βοήθεια των (4.2) και (4.3) την μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)$:

$$\mathcal{F}[f(x)] \equiv F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{ik+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ik}{1+ik} \quad ,$$

ή ισοδύναμα, $\quad F(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{k(k+i)}{1+k^2} \quad .$

β) Ας συμβολίσουμε με $U(k,t)$ την μετασχηματισμένη Fourier (ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) της προς προσδιορισμό συνάρτησης $u(x,t)$. Δηλαδή

$$\mathcal{F}[u(x,t)] \equiv U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx \,. \tag{4.6}$$

Οι αρχικές συνθήκες για $t=0$ εισαγόμενες σε αυτή την σχέση μας δίνουν

$$U(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx = F(k)\,, \tag{4.7}$$

$$\left.\frac{\partial U(k,t)}{\partial t}\right\|_{t=0} = 0\,. \tag{4.8}$$

Αν δράσουμε πάνω στην διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}$ και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα μετασχηματισμού της παραγώγου (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.12) παίρνουμε

$$(ik)^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t} + U = 0\,,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t} + (1+k^2)U = 0\,.$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια συνήθης δευτεροτάξια γραμμική με σταθερούς συντελεστές ομογενής διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση και η παράγωγός της γράφονται

$$U(k,t)=A(k)e^{(ik-1)t}+B(k)e^{-(ik+1)t}. \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t}=(ik-1)A(k)e^{(ik-1)t}-(ik+1)B(k)e^{-(ik+1)t}. \qquad (4.10)$$

Οι συντελεστές $A(k)$ και $B(k)$ είναι οι ‘‘σταθερές της ολοκλήρωσης’’ και μπορούν να προσδιορισθούν μέσω των αρχικών συνθηκών (4.7), (4.8). Πράγματι, εισάγοντας αυτές τις συνθήκες στις (4.9), (4.10) θα έχουμε

$$A(k)+B(k)=F(k) \quad \text{και} \quad (ik-1)A(k)-(ik+1)B(k)=0.$$

Λύνουμε το γραμμικό αυτό σύστημα ως προς $A(k)$ και $B(k)$ και παίρνουμε

$$A(k)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}, \quad B(k)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{ik-1}{ik+1}.$$

Τώρα η (4.9) γράφεται

$$U(k,t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{(ik-1)t}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{ik-1}{ik+1}e^{-(ik+1)t}, \text{ ή ακόμα,}$$

$$U(k,t)=\frac{e^{-t}}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikt}+e^{-ikt}-\frac{2}{ik+1}e^{-ikt}\right).$$

Δρώντας πάνω στην $U(k,t)$ με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ και λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμικότητα παίρνουμε:

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[U(k,t)]=\frac{e^{-t}}{2\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}[e^{ikt}]+\mathcal{F}^{-1}[e^{-ikt}]-2\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{ik+1}e^{-ikt}\right]\right)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης της ανεξάρτητης μεταβλητής (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.12) και τις (4.3), (4.5) είναι εύκολο να γράψουμε τις αντίστροφες μετασχηματισμένες που υπεισέρχονται στο δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης:

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{ikt}]=\sqrt{2\pi}\,\delta(x+t),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-ikt}]=\sqrt{2\pi}\,\delta(x-t),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{ik+1}e^{-ikt}\right]=\sqrt{2\pi}e^{-(x-t)}H(x-t).$$

Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση γράφεται

$$u(x,t)=\frac{e^{-t}}{2\sqrt{2\pi}}\left[\sqrt{2\pi}\delta(x+t)+\sqrt{2\pi}\delta(x-t)-2e^{t-x}H(x-t)\right],$$

ή ισοδύναμα,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}e^{-t}\left[\delta(x+t)+\delta(x-t)\right]-e^{-x}H(x-t).$$

<u>Σημείωση</u>: Οι αντίστροφες μετασχηματισμένες μπορεί να υπολογισθούν και απευθείας με ολοκλήρωση. Ο υπολογισμός των $\mathcal{F}^{-1}[e^{ikt}]$, $\mathcal{F}^{-1}[e^{ikt}]$ είναι άμεσος μέσω της γνωστής αναπαράστασης της ‘‘συνάρτησης δέλτα’’:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dk=\delta(x).$$

Για τον υπολογισμό της $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{ik+1}e^{-ikt}\right]$ που οδηγεί σε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα (2^{η} κατηγορία ολοκληρωμάτων σελ.77 των σημειώσεων) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων και το λήμμα Jordan. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης έχει ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ik+1}e^{i(x-t)k}dk=\begin{cases}2\pi e^{t-x} & \text{αν } x-t>0\\ 0 & \text{αν } x-t<0\end{cases}$$