ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α)

Μια συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ έχει παράγωγο σε ένα σημείο $z_0=x_0+iy_0$ αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

i) Οι πρώτες μερικές παράγωγοι $u_x(x,y),\ u_y(x,y),\ v_x(x,y),\ v_y(x,y)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σημείο (x_0,y_0).

ii) Στο σημείο (x_0,y_0) επαληθεύονται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Επί τούτου κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.12.

Μια συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ που έχει παράγωγο σε ένα σημείο z_0 δεν είναι εκεί απαραίτητα και αναλυτική. Για να είναι αναλυτική θα πρέπει επί πλέον να υπάρχει γειτονιά του z_0 σε όλα τα σημεία της οποίας η $f(z)$ να έχει παράγωγο. (Κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.14)

β) Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $f_1(z)$ είναι:

$$u(x,y)=x^2-y^2\,,\ \ v(x,y)=2(x^2+y^2-xy)\,.$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι $u_x=2x$, $u_y=-2y$, $v_x=4x-2y$, $v_y=4y-2x$ είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x,y*. Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ γράφονται:

$$2x=4y-2x,\ \ \text{-}2y=-(4x-2y)\,.$$

Και οι δύο ισοδυναμούν με την εξίσωση $y=x$, η οποία περιγράφει την ευθεία «κύρια διχοτόμο» του επιπέδου x,y στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Συμπερασματικά, η $f_1(z)$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου (ευθεία): $z=(1+i)x$ με $-\infty<x<+\infty$. Στα σημεία αυτά η παράγωγος $f_1'(z)$ γράφεται:

$$f_1'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2(2x - y) = 2(1+i)x.$$

Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις e^z και $\cos z$ είναι ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις. Η $f_2(z)$ που είναι σύνθεση αυτών των συναρτήσεων είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που είναι ρίζες της εξίσωσης $\cos(2z) + \sqrt{2} = 0$ ή ισοδύναμα της εξίσωσης

$$\frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} + \sqrt{2} = 0.$$

Θέτοντας $w = e^{2iz}$ μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση αυτή στην μορφή

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 1 = 0.$$

Οι ρίζες της γράφονται $w_1 = e^{2iz_1} = -\sqrt{2} + 1$ και $w_2 = e^{2iz_2} = -\sqrt{2} - 1$. Οι τιμές z_1 και z_2 μπορούν να προσδιορισθούν ως εξής:

$$e^{2iz_1} = e^{2i(x_1 + iy_1)} = e^{-2y_1} e^{2ix_1} = (\sqrt{2} - 1)e^{i\pi} \Rightarrow$$
$$e^{-2y_1} = \sqrt{2} - 1 \text{ και } 2x_1 = \pi + 2k\pi \Rightarrow$$
$$z_1(k) = \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{i}{2}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right), \text{ όπου } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$z_2(k) = -\frac{i}{2}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ όπου } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η $f_2(z)$ δεν είναι αναλυτική στις δύο απειροπληθείς οικογένειες σημείων $z_1(k)$ και $z_2(k)$ με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Τα σημεία αυτά είναι απλές ρίζες και επομένως απλοί πόλοι της συνάρτησης $f_2(z)$.

Εναλλακτικά τα z_1 και z_2 μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια της (πλειότιμης) συνάρτησης $\log z$. Π.χ. για το z_1 ο υπολογισμός έχει ως εξής:

$$\log e^{2iz_1} = \log(1 - \sqrt{2}) = \log\left[\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{i\pi}\right] \Rightarrow$$
$$2iz_1 = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + i(\pi + 2k\pi) \Rightarrow z_1(k) = -\frac{i}{2}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Σημειώστε εδώ ότι $\log e^{2iz_1} = 2iz_1 + i(\text{ακέραιο πολ. του } 2\pi)$.. Ο όρος αυτός με το ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π έχει απορροφηθεί στον όρο $i2k\pi$ στο δεξί μέλος της ποιο πάνω εξίσωσης.

γ) <u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_1.

Επειδή η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο είμαστε αναγκασμένοι για τον υπολογισμό του δρομικού ολοκληρώματος να προχωρήσουμε σε παραμετροποίηση. Ο βρόχος C αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΒΟ και το κυκλικό τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$. Η παραμετρική εξίσωση για καθένα από αυτά έχει ως εξής:

Για το ΟΑ: Εδώ $x=0$ και άρα $z(y)=iy$ με $0\le y\le 2$. Ενώ $f_1(z)=-y^2+2iy^2=(2i-1)y^2$.

Για το $\widehat{\mathrm{AB}}$: Εδώ $z(\theta)=2e^{i\theta}$ με $0\le\theta\le\pi/2$. Ενώ $f_1(z)=4e^{-2i\theta}+8i$.

Για το ΒΟ: Εδώ $y=0$ και άρα $z(x)=x$ με $0\le x\le 2$. Ενώ $f_1(z)=x^2+2ix^2=(1+2i)x^2$.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε κάθε δρόμο θα είναι:

$$\int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz=(2i-1)\int_0^2 y^2 i dy=-(2+i)\frac{y^3}{3}\Bigg\|_0^2=-\frac{8}{3}(2+i)\ .$$

$$\int_{\widehat{\mathrm{AB}}} f_1(z)dz=\int_{\pi/2}^{0}\left(4e^{-2i\theta}+8i\right)2ie^{i\theta}d\theta=8i\int_{\pi/2}^{0}\left(e^{-i\theta}+2ie^{i\theta}\right)d\theta=$$

$$=8\left(-e^{-i\theta}+2ie^{i\theta}\right)\Bigg\|_{\pi/2}^{0}=8\left(-1+2i+e^{-i\pi/2}-2ie^{i\pi/2}\right)=8(-1+2i-i-2i^2)=8(1+i)$$

$$\int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz=(1+2i)\int_2^0 x^2dx=(1+2i)\frac{x^3}{3}\Bigg\|_2^0=-\frac{8}{3}(1+2i)$$

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz=\int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz+\int_{\widehat{\mathrm{AB}}} f_1(z)dz+\int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz=-\frac{8}{3}(2+i)+8(1+i)-\frac{8}{3}(1+2i)=0$$

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_2.

Επειδή τα ανώμαλα σημεία (απλοί πόλοι) της συνάρτησης $f_2(z)$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και εφόσον κανένα από αυτά δεν βρίσκεται πάνω στον δρόμο ολοκλήρωσης το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Άρα το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε την θέση αυτών των σημείων στο μιγαδικό επίπεδο, να βεβαιωθούμε ότι κανένα από αυτά δεν βρίσκεται πάνω στον C, και τέλος να πρέπει να βρούμε ποια από αυτά βρίσκονται στο εσωτερικό του C.

Επειδή ο βρόχος C βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο πρέπει να βρούμε αρχικά ποια από τα ανώμαλα σημεία βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο. Τα σημεία $z_2(k)$ βρίσκονται όλα στο δεύτερο (αν $k>0$) και τρίτο (αν $k<0$) τεταρτημόριο και επομένως είναι όλα έξω από τον C. Μένει να βρούμε ποια από τα $z_1(k)$ βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο και μέσα στον C. Παρατηρούμε ότι $2>\mathrm{Im}[z_1(k)]=-(1/2)\ln(\sqrt{2}-1)\simeq 0,44>0$, ενώ $\mathrm{Re}[z_1(k)]=\pi/2+k\pi$, οπότε είναι σαφές ότι $2>\mathrm{Re}[z_1(k)]>0$ μόνο αν $k=0$. Δηλαδή μόνο το σημείο $z_1\equiv z_1(0)=\pi/2-(i/2)\ln(\sqrt{2}-1)\simeq\pi/2+0,44i$ είναι ''υποψήφιο'' για να βρίσκεται μέσα στον C. Για να συμβαίνει όμως αυτό θα πρέπει $0<|z_1|<2$. Προφανώς όμως

$$0<|z_1|\simeq\sqrt{(\pi/2)^2+0,44^2}<\sqrt{(\pi/2)^2+0,5^2}\simeq\sqrt{2,72}<2\ ,$$

και έτσι το σημείο z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του C. Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων και αφού λάβουμε υπόψη ότι ο βρόχος C είναι αρνητικά προσανατολισμένος μπορούμε να γράψουμε

$$\oint_C f_2(z)dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1} f_2(z)\,.$$

Επειδή το z_1 είναι απλός πόλος θα έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f_2(z)=\frac{e^{2iz}}{\left[\cos(2z)+\sqrt{2}\right]'}\Bigg\|_{z=z_1}=-\frac{e^{2iz_1}}{2\sin(2z_1)}\ .$$

Υπολογίζουμε ξέχωρα τον αριθμητή και τον παρονομαστή στο δεξιό μέλος της εξίσωσης:

$$e^{2iz_1}=e^{i\pi+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}=e^{i\pi}e^{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}=-\left(\sqrt{2}-1\right).$$

$$2\sin\left(2z_1\right)=2\frac{e^{i2z_1}-e^{-i2z_1}}{2i}=\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}}{i}=$$
$$-i\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=-i\left(1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\right)=-2i$$

Τελικά $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f_2(z)=-\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{-2i}=\dfrac{i}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ και

$\oint\limits_C f_2(z)dz=-2\pi i\dfrac{i}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)=\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$.

ΘΕΜΑ 2.

α) Η $f_1(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία $z=1$ (διπλός πόλος) και $z=2$ (απλός πόλος). Το ζητούμενο ανάπτυγμα θα είναι ένα ανάπτυγμα Maclaurin διότι η $f_1(z)$ είναι αναλυτική σε όλα σημεία τα σημεία του ανοικτού κυκλικού δίσκου $|z|<1$. Η ακτίνα σύγκλισης ισούται με 1, όση η απόσταση του κέντρου $z_0=0$ της σειράς από το πλησιέστερο ανώμαλο σημείο $z=1$.

Η $f_1(z)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{2}{z-2}-\frac{2}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Αναλύουμε τώρα σε σειρά στο χωρίο $|z|<1$ καθένα από τα απλά κλάσματα:

$$\frac{2}{z-2}=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,\ \text{διότι}\ \left|\frac{z}{2}\right|<1.$$

$$-\frac{2}{z-1}=\frac{2}{1-z}=2\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\ \text{διότι}\ |z|<1.$$

Για να αναλύσουμε σε σειρά τον όρο $1/(z-1)^2$ παρατηρούμε τα κάτωθι:

Η σειρά Maclaurin $1/(1-z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποχωρίο $|z|\le r<1$ του χωρίου $|z|<1$ (βλέπε Θεώρημα 6.10 σελ.48 στις Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού). Γι' αυτό σε κάθε τέτοιο υποχωρίο παραγωγίζεται όρο προς όρο έτσι ώστε (βλέπε Θεώρημα 6.8 σελ.44 στις Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού)

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^n\right)' \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

και η σύγκλιση της παραγωγισμένης σειράς είναι πάλι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό υποχωρίο $|z| \le r < 1$. Συνοψίζοντας τα ανωτέρω μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \,,$$

Ή ισοδύναμα συμπτύσσοντας τα αθροίσματα στο δεξί μέλος

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-n-2^{1-n}\right)z^n \,.$$

β) Η συνάρτηση $f(z) = z^2 e^{1/z}$ είναι παντού αναλυτική εκτός από το σημείο $z=0$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου *C*. Με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) \,.$$

Όμως η συνάρτηση $f(z)$ δεν υπάγεται στις δύο κατηγορίες συναρτήσεων που μπορούμε μέσω ενός απλού τύπου να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο (βλέπε Θεώρημα 7.1 σελ.63 και Θεώρημα 7.2 σελ.65 στις Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού). Για τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου είμαστε εδώ αναγκασμένοι να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ σε μια τρυπημένη γειτονιά $0<|z|<R$ του σημείου $z=0$ με το *R* αρκούντως μικρό έτσι ώστε σε όλα τα σημεία της εκτός από το κέντρο η $f(z)$ να είναι αναλυτική. Αυτό το ανάπτυγμα Laurent γράφεται

$$f(z) = z^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}z^3+\ldots\right) = z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{z}+\ldots$$

Επειδή στο ανάπτυγμα Laurent οι όροι με τις αρνητικές δυνάμεις του *z* είναι άπειροι στο πλήθος συμπεραίνουμε ότι το σημείο $z=0$ είναι ένα ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο

θα είναι εξ' ορισμού ο συντελεστής μπροστά από τον όρο με το $1/z$.
Δηλαδή

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}.$$

Τελικά η τιμή του ολοκληρώματος είναι

$$\oint_C z^2 e^{1/z} dz = \frac{\pi}{3} i.$$

ΘΕΜΑ 3.

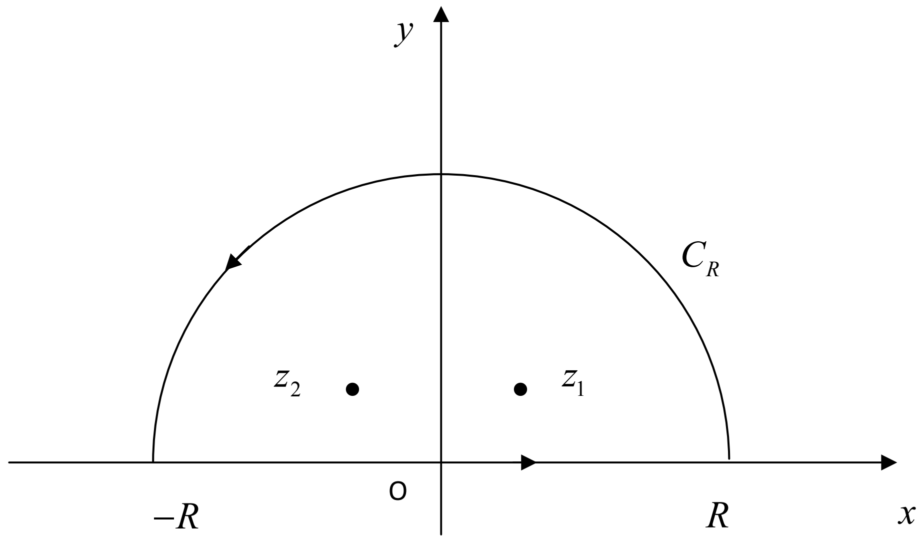
Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z) = f(z) e^{i\pi z}, \text{ όπου } f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 4}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $g(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις τέσσερις απλές ρίζες της εξίσωσης $z^4 + 4 = 0$. Οι ρίζες αυτές υπολογίζονται εύκολα (βλέπε στις Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού: εξίσωση (1.14) σελ.5 και Παράδειγμα 1.2 σελ. 5), αρκεί να επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση σε πολική (ή τριγωνομετρική) μορφή. Επειδή $|z|^4 = 4 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$ και οι ζητούμενες ρίζες σε πολική μορφή γράφονται $z = \sqrt{2} e^{i\theta}$. Μένει να υπολογίσουμε το όρισμα θ. Επειδή $-4 = e^{i\pi}$ η προς επίλυση εξίσωση γράφεται

$$\left(\sqrt{2} e^{i\theta}\right)^4 = 4 e^{i\pi} \quad \Rightarrow \quad e^{4i\theta} = e^{i\pi},$$

οπότε οι τέσσερις τιμές για το όρισμα θ θα είναι $4\theta = \pi + 2k\pi$ όπου $k = -2, -1, 0, 1$ ή ισοδύναμα $\theta = \pi/4 + k\pi/2$ με $k = -2, -1, 0, 1$. Θα έχουμε λοιπόν $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$, $\theta_3 = -3\pi/4$, $\theta_4 = -\pi/4$ και οι τέσσερις ρίζες γράφονται $z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{2} e^{i3\pi/4} = -1 + i$, $z_3 = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4} = -1 - i$, $z_4 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = 1 - i$. Παρατηρούμε ότι από αυτές τις ρίζες μόνο οι z_1 και z_2 βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο ($y > 0$) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των x.



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C και την συνάρτηση $g(z)$ μας δίνει

$$\oint_C g(z)dz = \int_{C_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z)\right]$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z)\right] \qquad (3.1)$$

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στα σημεία z_1 και $z_2 = -\overline{z}_1$ (που είναι απλοί πόλοι της $g(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) = \frac{z_1^{\,2}}{4z_1^{\,3}} e^{i\pi z_1} = \frac{1}{4(1+i)} e^{i\pi(1+i)} = -\frac{1-i}{8} e^{-\pi},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z) = \frac{z_2^{\,2}}{4z_2^{\,3}} e^{i\pi z_2} = \frac{1}{4(-1+i)} e^{i\pi(-1+i)} = \frac{1+i}{8} e^{-\pi}.$$

Έτσι,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z) = \left(\frac{-1+i}{8} + \frac{1+i}{8}\right) e^{-\pi} = \frac{i}{4} e^{-\pi}.$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi}\,. \tag{3.2}$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια του λήμματος Jordan[1] (βλέπε σημειώσεις Μιγαδ. Λογ. σελ. 78) ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$. Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για τα σημεία z πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R$) για να πάρουμε:

$$\left|z^4+4\right| \ge \left|\left|z^4\right|-4\right| = \left|\left|z\right|^4-4\right| = R^4-4 \Rightarrow \left|\frac{z^2}{z^4+4}\right| \le \frac{R^2}{R^4-4}\,.$$

Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$\left|f(z)\right| \le M_R \equiv \frac{R^2}{R^4-4}\,.$$

Τώρα επειδή $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ από το λήμμα Jordan έπεται ότι

$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$ και έτσι η σχέση (3.2) γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4}e^{i\pi x} = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi}\,.$$

Από αυτήν παίρνοντας τα πραγματικά μέρη και των δύο μελών προκύπτει ότι

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\cos(\pi x)dx = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi}$. Τέλος, επειδή η συνάρτηση κάτω από την ολοκλήρωση είναι άρτια θα έχουμε και

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\cos(\pi x)dx = -\frac{\pi}{4}e^{-\pi}\,.$$

---

[1] Η απόδειξη μπορεί να γίνει και με την βοήθεια της ανισότητας Darboux. Πάνω στον C_R θα έχουμε $\left|f(z)\right| \le R^2/(R^4-4)$ και $\left|e^{i\pi z}\right| = e^{-\pi y} \le 1$ οπότε $\left|f(z)e^{i\pi z}\right| \le R^2/(R^4-4)$. Η ανισότητα του Darboux γράφεται $\left|\int_{C_R} f(z)e^{i\pi z}dz\right| \le \left(R^2/R^4-4\right)\pi R = \pi R^3/(R^4-4) \underset{R\to\infty}{\to} 0$.

ΘΕΜΑ 4.

Ας συμβολίσουμε με $U(k,t)$ την μετασχηματισμένη Fourier (ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) της προς προσδιορισμό συνάρτησης $u(x,t)$. Δηλαδή

$$\mathcal{F}[u(x,t)] \equiv U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx .$$

Αν δράσουμε πάνω στην διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}$ και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα μετασχηματισμού της παραγώγου (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.12) παίρνουμε

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (ik)^2 U - U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -(1+k^2)U ,$$

της οποίας η ολοκλήρωση μας δίνει

$$U(k,t) = U(k,0) e^{-(1+k^2)t} .$$

όμως από την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \delta(x)$ προκύπτει ότι (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», *Παράδειγμα 3* σελ.10)

$$U(k,0) = \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

και έτσι

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+k^2)t} .$$

Η ζητούμενη λύση προκύπτει με την βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}[e^{-(1+k^2)t}] .$$

Ο υπολογισμός της $\mathcal{F}^{-1}[e^{-(1+k^2)t}]$ είναι εύκολος[2]. Θα έχουμε

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1+k^2)t}e^{ikx}dk=\frac{e^{-t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(ixk-tk^2)}dk\,.$$

Εδώ παρατηρούμε ότι $ixk-tk^2=-\left[\sqrt{t}\left(k-i\,x/2t\right)\right]^2-x^2/4t$ οπότε

$$u(x,t)=\frac{e^{-t}e^{-x^2/4t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left[\sqrt{t}\left(k-ix/2t\right)\right]^2}dk$$

Με την αλλαγή $k\to\lambda=\sqrt{t}(k-ix/2t)$ στην μεταβλητή ολοκλήρωσης η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$u(x,t)=\frac{e^{-\left(t+\frac{x^2}{4t}\right)}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}d\lambda=\frac{e^{-\left(t+\frac{x^2}{4t}\right)}}{2\pi\sqrt{t}}\sqrt{\pi}$$

και τελικά

$$u(x,t)=\frac{e^{-\left(t+\frac{x^2}{4t}\right)}}{2\sqrt{\pi t}}\,.$$

[2] Δείτε ένα παρόμοιο υπολογισμό στο «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού» *Παράδειγμα 4* σελ.11.