ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012

ΤΜΗΜΑ Α

ΘΕΜΑ 1.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = y\sin x - ix, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{5-4\sin z} + \frac{1}{z^2+i} \quad ,$$

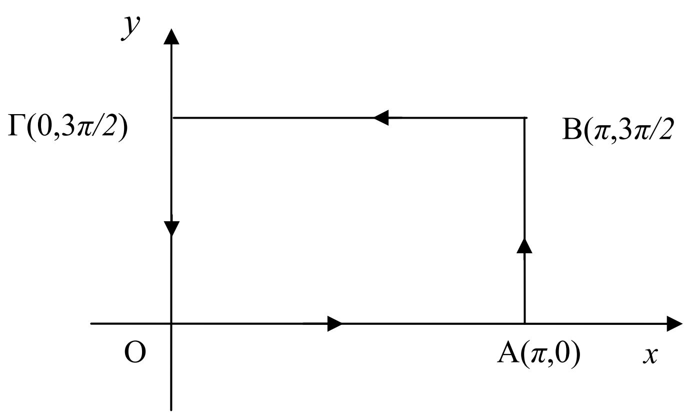
όπου $z = x + iy$.

α) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις αυτές έχουν παράγωγο και μετά τα σημεία (αν υπάρχουν) που είναι αναλυτικές. Δώστε την παράγωγο της συνάρτησης f_1 στα σημεία που αυτή υπάρχει. (Δίνεται ότι $\ln 2 \simeq 0,69$).

β) Υπολογίστε τα δρομικά ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος ΟΑΒΓ σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου όπως φαίνεται στο σχήμα.



ΘΕΜΑ 2.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z)=\dfrac{9z^2}{(z+1)^2(z-2)}$ και $f_2(z)=\dfrac{1}{1-z}e^{2/z}$.

α) Εξετάστε κατά πόσον το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z των συναρτήσεων αυτών είναι ένα ανάπτυγμα Laurent ή ένα ανάπτυγμα MacLaurin και προσδιορίστε το χωρίο σύγκλισης καθενός από αυτά τα αναπτύγματα.

β) Γράψτε αυτό το ανάπτυγμα της $f_1(z)$. Δώστε την τιμή του $\operatorname*{Res}_{z=0} f_1(z)$.

γ) Δώστε την τιμή του $\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z)$.

ΘΕΜΑ 3.

Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα. (Όλα τα υπολογιστικά σας βήματα θα αιτιολογηθούν. Οι δρόμοι ολοκλήρωσης θα επισημανθούν στα δρομικά ολοκληρώματα όπως επίσης και θα σχεδιασθούν στο γραπτό).

α) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ β) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x)=H(x)e^{-x}\cos x$ όπου $H(x)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση βήματος.

β) Εφαρμόστε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-u\,,$$

η οποία συνοδεύεται από τις συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty,t)=u(+\infty,t)=0$.

Αρχική συνθήκη: $u(x,0)=\delta(x)$, όπου $\delta(x)$ είναι η «συνάρτηση δέλτα» του Dirac.

ΤΜΗΜΑ Β

ΘΕΜΑ 1.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(z) = x\sin y - iy, \quad f_2(z) = \frac{\cos(2z)}{5+4\cos(2z)} + \frac{1}{z^2+2i},$$

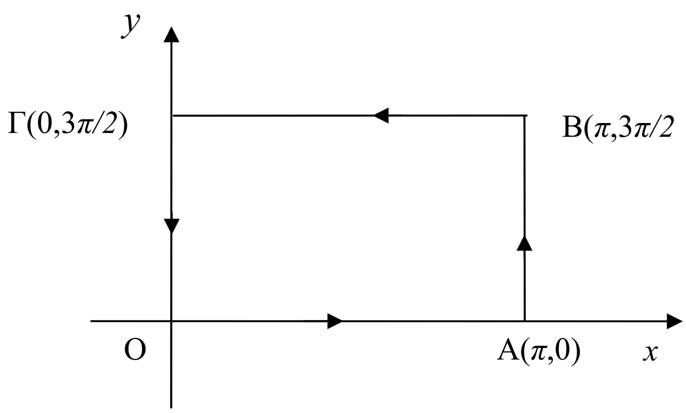
όπου $z = x + iy$.

α) Προσδιορίστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις αυτές έχουν παράγωγο και μετά τα σημεία (αν υπάρχουν) που είναι αναλυτικές. Δώστε την παράγωγο της συνάρτησης f_1 στα σημεία που αυτή υπάρχει. (Δίνεται ότι $\ln 2 \simeq 0,69$).

β) Υπολογίστε τα δρομικά ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος ΟΑΒΓ σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου όπως φαίνεται στο σχήμα.



ΘΕΜΑ 2.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = \dfrac{2z-5}{(z-1)^2(z+2)}$ και $f_2(z) = \dfrac{1}{1+z}e^{1/z}$.

α) Εξετάστε κατά πόσον το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z των συναρτήσεων αυτών είναι ένα ανάπτυγμα Laurent ή ένα ανάπτυγμα

MacLaurin και προσδιορίστε το χωρίο σύγκλισης καθενός από αυτά τα αναπτύγματα.

β) Γράψτε αυτό το ανάπτυγμα της $f_1(z)$. Δώστε την τιμή του $\operatorname*{Res}_{z=0} f_1(z)$.

γ) Δώστε την τιμή του $\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z)$.

ΘΕΜΑ 3.

Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα. (Όλα τα υπολογιστικά σας βήματα θα αιτιολογηθούν. Οι δρόμοι ολοκλήρωσης θα επισημανθούν στα δρομικά ολοκληρώματα όπως επίσης και θα σχεδιασθούν στο γραπτό).

$$\alpha)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx \qquad \beta)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x) = H(x)e^{-x}\sin x$ όπου $H(x)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση βήματος.

β) Εφαρμόστε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

η οποία συνοδεύεται από τις συνθήκες:

<u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty,t) = u(+\infty,t) = 0$.

<u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0) = \delta(x)$, όπου $\delta(x)$ είναι η «συνάρτηση δέλτα» του Dirac.