ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

Τμήμα Α (α)

Για τη συνάρτηση $f_1(z)$: Παρατηρούμε ότι $u = y\sin x$ και $v = -x$ οπότε

$$u_x = y\cos x,\ \ u_y = \sin x,\ \ v_x = -1,\ \ v_y = 0.$$

Οι ανωτέρω πρώτες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις σε όλο το επίπεδο *x*,*y*. Άρα η $f_1(z)$ θα έχει παράγωγο μόνο στα σημεία που ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $(u_x = v_y,\ u_y = -v_x)$ οι οποίες γράφονται

$$y\cos x = 0 \quad \text{και} \quad \sin x = -1$$

και μας δίνουν

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad \text{και } -\infty < y < +\infty$$

ή ισοδύναμα

$$z(y) = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + iy \quad \text{με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad \text{και } -\infty < y < +\infty$$

Αυτή είναι η παραμετρική εξίσωση (παράμετρος *y*) μιας οικογένειας ευθειών που είναι παράλληλες προς τον φανταστικό άξονα. Μόνο στα σημεία αυτής της οικογένειας ευθειών η $f_1(z)$ παραγωγίζεται. Η παράγωγος γράφεται

$$f_1'(z) = u_x + iv_x \Big\|_{x = 2k\pi - \pi/2} = -1.$$

Η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Αυτό γιατί όποια γειτονιά ενός σημείου πάνω σε αυτή την οικογένεια ευθειών και αν θεωρήσουμε θα υπάρχουν σημεία αυτής της γειτονιάς που δεν ανήκουν οικογένεια και στα οποία η $f_1(z)$ δεν έχει παράγωγο.

<u>Συνάρτηση</u> $f_2(z)$: Η $f_2(z)$ ως το άθροισμα πηλίκων αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική παντού εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν τους παρονομαστές. Αυτά τα σημεία (στα οποία βέβαια η $f_2(z)$ δεν έχει ούτε παράγωγο) είναι ρίζες των εξισώσεων

$$z^2 = -i \quad \text{και} \quad 5 - 4\sin z = 0 .$$

Επίλυση της $z^2 = -i$: Παρατηρώ παίρνοντας τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης ότι $|z| = 1$. Θέτω $z = e^{i\theta}$ και η εξίσωση γράφεται σε πολική μορφή $e^{2i\theta} = e^{i(2k\pi - \pi/2)}$. Άρα $\theta = -\pi/4 + k\pi$ με $k = 0,1$. Έτσι παίρνουμε τα δύο σημεία

$$z_1 = e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad z_2 = e^{i3\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

που συνιστούν απλούς πόλους της $f_2(z)$.

Επίλυση της $5 - 4\sin z = 0$: Η εξίσωση αυτή γράφεται
$$5 - 4\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)/2i = 0 \;\Rightarrow\; 2e^{2iz} - 5ie^{iz} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; e^{iz} = (5 \pm 3)i/4 ,$$

ή ακόμα,

$$iz = \log\left[(5 \pm 3)i / 4\right] = \ln\left[(5 \pm 3) / 4\right] + i(2k\pi + \pi/2) ,$$

από όπου παίρνουμε τα σημεία

$$z_3 = i\ln 2 + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad z_4 = -i\ln 2 + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \;, \quad \text{με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

τα οποία αποτελούν απλούς πόλους της $f_2(z)$.

<u>Τμήμα Β</u> (α)

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε ότι η $f_1(z)$ έχει παράγωγο στα σημεία της οικογένειας ευθειών

$$z(x) = x + \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)i \quad \text{με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad \text{και } -\infty < x < +\infty$$

Σε αυτά τα σημεία η παράγωγος γράφεται

$$f_1'(z) = u_x + iv_x \Big\|_{y = 2k\pi - \pi/2} = -1 .$$

Η $f_1(z)$ δεν είναι πουθενά αναλυτική.

Η $f_2(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες των εξισώσεων $z^2 = -2i$ και $5+4\cos(2z)=0$. Όπως και ανωτέρω εύκολα βρίσκουμε ότι οι ρίζες της μεν πρώτης εξίσωσης είναι

$$z_1 = 1-i \quad \text{και} \quad z_2 = -1+i\,,$$

της δε δεύτερης

$$z_3 = \frac{i}{2}\ln 2 + k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad z_4 = -\frac{i}{2}\ln 2 + k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

<u>Τμήμα Α</u> (β)

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_1.

Επειδή η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο είμαστε αναγκασμένοι για τον υπολογισμό του δρομικού ολοκληρώματος να προχωρήσουμε σε παραμετροποίηση. Ο βρόχος *C* αποτελείται από τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΟ. Η παραμετρική εξίσωση για καθένα από αυτά έχει ως εξής:

Για το ΟΑ: Εδώ $y=0$ και άρα $z(x)=x$ με $0 \le x \le \pi$. Ενώ $f_1(z) = -ix$.

Η παραμετρική εξίσωση για καθένα από αυτά έχει ως εξής:

Για το ΑΒ: Εδώ $x=\pi$ και άρα $z(y) = \pi + iy$ με $0 \le y \le 3\pi/2$. Ενώ $f_1(z) = -i\pi$.

Για το ΒΓ: Εδώ $y = 3\pi/2$ και άρα $z(x) = x + i3\pi/2$ με $0 \le x \le \pi$. Ενώ $f_1(z) = (3\pi/2)\sin x - ix$.

Για το ΓΟ: Εδώ $x=0$ και άρα $z(y) = iy$ με $0 \le y \le 3\pi/2$. Ενώ $f_1(z)=0$
.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε κάθε δρόμο θα είναι:

$$\int_{\text{ΟΑ}} f_1(z)dz = \int_0^{\pi} (-ix)dx = -i\frac{x^2}{2}\Bigg\|_0^{\pi} = -i\frac{\pi^2}{2} \;.$$

$$\int_{\text{ΑΒ}} f_1(z)dz = \int_0^{3\pi/2} (-i\pi)idy = \pi y\Big\|_0^{3\pi/2} = \frac{3}{2}\pi^2 \;.$$

$$\int_{\text{ΒΓ}} f_1(z)dz = \int_{\pi}^{0} \left[\left(3\pi/2 \right) \sin x - ix \right] dx = -\left(3\pi/2 \right) \cos x - ix^2 / 2 \Big\|_{\pi}^{0} =$$

$$= -3\pi + i\pi^2 / 2$$

$$\int_{\text{ΓΟ}} f_1(z)dz = \int_{3\pi/2}^{0} 0 i dy = 0 .$$

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{\text{ΟΑ}} f_1(z)dz + \int_{\text{ΑΒ}} f_1(z)dz + \int_{\text{ΒΓ}} f_1(z)dz + \int_{\text{ΓΟ}} f_1(z)dz = \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi$$

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_2 .

Επειδή τα ανώμαλα σημεία (απλοί πόλοι) της συνάρτησης $f_2(z)$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και εφόσον κανένα από αυτά δεν βρίσκεται πάνω στον δρόμο ολοκλήρωσης το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Άρα το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε την θέση αυτών των σημείων στο μιγαδικό επίπεδο, να βεβαιωθούμε ότι κανένα από αυτά δεν βρίσκεται πάνω στον βρόχο C , και τέλος να πρέπει να βρούμε ποια από αυτά βρίσκονται στο εσωτερικό του C. Είναι προφανές ότι από τα ανώμαλα σημεία μόνο το $z_3 = i \ln 2 + \pi / 2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου C ενώ τα υπόλοιπα βρίσκονται όλα έξω από τον C. Τώρα το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων μας δίνει

$$\oint_C f_2(z)dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_3} f_2(z)$$

όπου αφού το z_3 είναι απλός πόλος

$$\operatorname*{Res}_{z=z_3} f_2(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_3} \frac{\sin z}{5 - 4\sin z} = \frac{\sin z_3}{-4\cos z_3}$$

Επειδή $\sin z_3 = 5/4$ και $\cos z_3 = \left(e^{iz_3} + e^{-iz_3} \right) / 2 = \left(i/2 + 2/i \right) / 2 = -3i / 4$

παίρνουμε τελικά

$$I_2 = 2\pi i \frac{5/4}{3i} = \frac{5}{6}\pi .$$

<u>Τμήμα Β</u> (β)

Η επεξεργασία είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του θέματος Α(β).

Βρίσκουμε ότι

$$I_1 = \frac{\pi^2}{2} + i\left(\pi + \frac{3\pi^2}{2}\right) \quad \text{και} \quad I_2 = -\frac{5}{12}\pi .$$

ΘΕΜΑ 2.

<u>Τμήμα Α</u> (α)

<u>Συνάρτηση</u> $f_1(z)$.

Η συνάρτηση $f_1(z)$ είναι ρητή και ως εκ τούτου αναλυτική παντού εκτός από τα σημεία $z=-1$ (πόλος τάξης 2) και $z=2$ (απλός πόλος). Το ανάπτυγμα επομένως με κέντρο το σημείο $z=0$ είναι ένα ανάπτυγμα MacLaurin ή ένα ανάπτυγμα Laurent ανάλογα με το χωρίο στο οποίο αναπτύσσουμε τη συνάρτηση. Έτσι θα έχουμε τα εξής:

Στο χωρίο $|z|<1$ που είναι ένας ανοικτός κυκλικός δίσκος στον οποίο η $f_1(z)$ είναι παντού αναλυτική το ανάπτυγμα θα είναι ένα ανάπτυγμα MacLaurin και η ακτίνα σύγκλισης (απόσταση του κέντρου από το κοντινότερο ανώμαλο σημείο) θα είναι 1.

Αντίθετα, στο δακτυλιοειδές χωρίο $1<|z|<2$ το ανάπτυγμα θα είναι ένα ανάπτυγμα Laurent αφού στον εσωτερικό κλειστό δίσκο $|z|\le 1$ υπάρχει το ανώμαλο σημείο $z=-1$.

Στο δακτυλιοειδές χωρίο $|z|>2$ το ανάπτυγμα θα είναι πάλι ένα ανάπτυγμα Laurent αφού στον εσωτερικό κλειστό δίσκο $|z|\le 2$ υπάρχουν τα ανώμαλα σημεία $z=-1$ και $z=2$.

<u>Συνάρτηση</u> $f_2(z)$.

Η συνάρτηση $f_2(z)$ έχει απλό πόλο το σημείο $z=1$ και ουσιώδες ανώμαλο σημείο το $z=0$. Άρα το ανάπτυγμα της $f_2(z)$ στο δακτυλιοειδές χωρίο $0<|z|<1$ θα είναι ένα ανάπτυγμα Laurent δυνάμεων του z (αφού το ανώμαλο σημείο $z=0$ βρίσκεται στον εσωτερικό κυκλικό δίσκο που εδώ είναι εκφυλισμένος σε ένα σημείο). Επίσης, το ανάπτυγμα στο χωρίο $1<|z|$ θα είναι και αυτό ένα ανάπτυγμα Laurent σε δυνάμεις του z (αφού τα δύο ανώμαλα σημεία $z=0$ και $z=1$ βρίσκονται στον εσωτερικό κυκλικό δίσκο $|z|\leq 1$).

<u>Τμήμα Β</u> (α)

Πανομοιότυπη επεξεργασία με την ανωτέρω για το ζήτημα Α(α). Ίδια αποτελέσματα.

<u>Τμήμα Α</u> (β)

Για τον υπολογισμό του αναπτύγματος της $f_1(z)$ την αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{9z^2}{(z+1)^2(z-2)}=\frac{4}{z-2}+\frac{5}{z+1}-\frac{3}{(z+1)^2}$$

<u>Ανάπτυγμα MacLaurin στο χωρίο</u> $|z|<1$:

Κάθε όρος στο δεξί μέλος αναλύεται σε σειρά στο χωρίο $|z|<1$ ως εξής:

$$\frac{4}{z-2}=-2\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n-1}}$$

$$\frac{5}{z+1}=\frac{5}{1-(-z)}=5\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$$

Ο υπολογισμός του αναπτύγματος της συνάρτησης $1/(z+1)^2$ μπορεί να γίνει εύκολα αν βασισθούμε στο ανάπτυγμα της $1/(z+1)$ και επικαλεσθούμε το θεώρημα 6.11 σελ. 49 στις σημειώσεις του μαθήματος. Θα έχουμε λοιπόν στο χωρίο $|z|<1$:

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{z+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n z^n\right]' \;\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{(z+1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n z^{n-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(z+1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} n z^{n-1} \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (n+1) z^n$$

Τελικά το ζητούμενο ανάπτυγμα MacLaurin γράφεται

$$f_1(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n-1}}+5\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n-3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)z^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2^{1-n}+(-1)^n(3n-2)\right]z^n$$

<u>Ανάπτυγμα Laurent στο χωρίο</u> $1<|z|<2$:

Στο χωρίο αυτό $|z/2|/<1$ και $|1/z|<1$. Έτσι καθένα από τα απλά κλάσματα θα έχει ένα ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z ως εξής:

$$\frac{4}{z-2}=-\frac{2}{1-\frac{z}{2}}=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}$$

Επειδή η ανωτέρω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποχωρίο του χωρίου $1<|z|<2$ με επίκληση γνωστού θεωρήματος (βλέπε σημειώσεις σελ.44 θεώρημα 6.8) μπορούμε να την παραγωγίσουμε όρο προς όρο για να πάρουμε

$$-\frac{1}{(z+1)^2}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{z^{n+2}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(z+1)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{z^n}$$

Τελικά το ζητούμενο ανάπτυγμα γράφεται

$$f_1(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n-1}} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} - 3\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{z^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2+3n}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n-1}}$$

<u>Ανάπτυγμα Laurent στο χωρίο</u> $|z| > 2$:

Στο χωρίο αυτό $|2/z| < 1$ και $|1/z| < 1$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο όπως και ανωτέρω βρίσκουμε ότι

$$\frac{4}{z-2} = \frac{4}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{4}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{z^n}$$

Το ανάπτυγμα των άλλων δύο απλών κλασμάτων $5/(z+1)$ και $3/(z+1)^2$ είναι το ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση και έτσι έχουμε

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2+3n}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2^{n+1} - (-1)^n (2+3n) \right] \frac{1}{z^n}$$

<u>Ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο</u> $z = 0$.

Επειδή η $f_1(z)$ είναι αναλυτική στο $z = 0$, προφανώς θα έχουμε

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_1(z) = 0.$$

<u>Σημείωση</u>: Για την επεξεργασία αυτού του ερωτήματος θα ήταν αρκετό να υπολογισθεί σωστά το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε ένα μόνο από τα ανωτέρω τρία χωρία. Το ίδιο ισχύει και για το τμήμα Β.

<u>Τμήμα Β</u> (β)

Με εντελώς ανάλογο τρόπο με τον ανωτέρω επεξεργαζόμαστε το ερώτημα αυτό για να βρούμε

$$\frac{2z-5}{(z-1)^2(z+2)} = -\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2},$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - n - 2 \right] z^n, \text{ στο χωρίο } |z| < 1,$$

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2-n}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \text{ στο χωρίο } 1 < |z| < 2,$$

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2 - n - (-1)^n 2^{n-1} \right] \frac{1}{z^n}, \text{ στο χωρίο } 2 < |z|,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_1(z) = 0.$$

<u>Τμήμα Α</u> (γ)

Το σημείο $z=0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο για την $f_2(z)$. Γι' αυτό είναι απαραίτητο να ανατρέξουμε στην σειρά Laurent της $f_2(z)$ στο χωρίο $0 < |z| < 1$ από όπου θα βρούμε την τιμή που έχει ο συντελεστής του όρου ως προς $1/z$. Βασιζόμενοι στο ανάπτυγμα MacLaurin της εκθετικής συνάρτησης $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n / n!$ θα έχουμε

$$f_2(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{2^m}{z^m} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!} z^{n-m}$$

Ο όρος ως προς $1/z$ λαμβάνεται από το ανωτέρω διπλό άθροισμα όταν $m = n+1$ και ο αντίστοιχος συντελεστής είναι προφανώς ο

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = -1 + e^2.$$

<u>Τμήμα Β</u> (γ)

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{m!} z^{n-m} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}$$

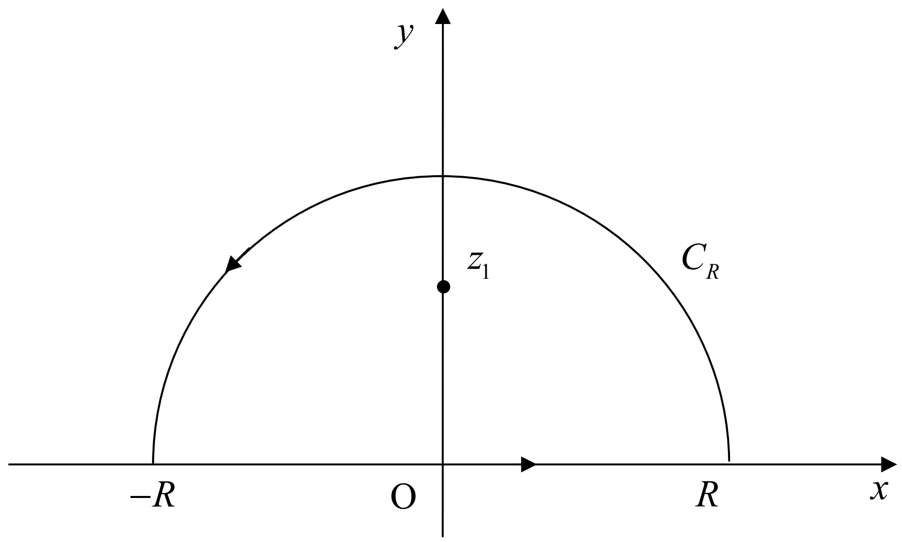
ΘΕΜΑ 3.

<u>Τμήμα Β</u> (α)

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $f(z)$ ως ρητή είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δύο διπλές ρίζες $z_1=i$ και $z_2=-i$ του παρονομαστή. Παρατηρούμε ότι από αυτές τις ρίζες η z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y>0$) ενώ η z_2 βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο ($y<0$).



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz=\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z).$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z_1 = i$ (που είναι διπλός πόλος της $f(z)$) γράφεται

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i}\left[\frac{z^2/(z+i)^2}{(z-i)^2}\right] = \left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]'_{z=i} = \frac{2iz}{(z+i)^3}\bigg\|_{z=i} = -\frac{i}{4}$$

και επομένως

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια της ανισότητας Darboux (βλέπε σημειώσεις Μιγαδ. Λογ. σελ. 27 εξίσωση (5.14)) ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.

Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για τα σημεία *z* πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R > |z_1| = i$) για να πάρουμε:

$$\left|z^2+1\right| \ge \left\|z^2\right|-1\right| = R^2 - 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right| \le \frac{1}{(R^2-1)^2} \Rightarrow \left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right| \le \frac{R^2}{(R^2-1)^2}.$$

Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)| \le M \equiv \frac{R^2}{(R^2-1)^2}.$$

Τώρα η ανισότητα Darboux γράφεται

$$0 \le \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{R^2}{(R^2-1)^2}\pi R = \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Άρα $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.

Τελικά αποδείξαμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Τμήμα Α</u> (α)

Η επεξεργασία είναι εντελώς ανάλογη με την ανωτέρω. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z) = 1/(z+1)^2$ με $z_1 = i$, $z_2 = -i$ πόλους τάξης 2 και τον ίδιο ημικυκλικό βρόχο *C*. Βρίσκουμε ότι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = -\frac{i}{4} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

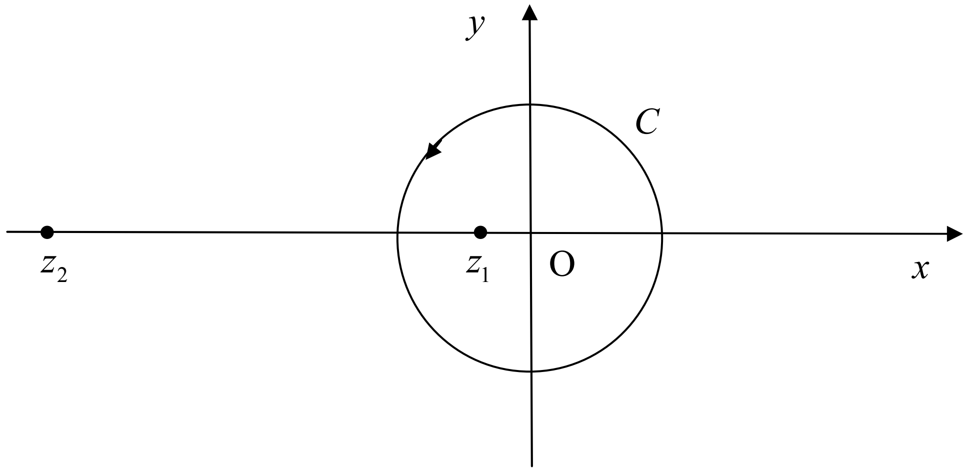
<u>Τμήμα Β</u> (β)

Το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε εντάσσεται στην γενική κατηγορία των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $z(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Δηλαδή το αρχικό πραγματικό ολοκλήρωμα θα προκύπτει σαν η παραμετροποίηση αυτού του δρομικού ολοκληρώματος.

Πάνω στον θετικά προσανατολισμένο μοναδιαίο κύκλο *C* με κέντρο την αρχή θα έχουμε λοιπόν $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, και $d\theta = dz/iz$. Έτσι το προτεινόμενο προς υπολογισμό ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή του δρομικού ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \oint_C \frac{1}{2 + \dfrac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}$$

Εδώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι ρητή και επομένως αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή που είναι απλοί πόλοι. Οι ρίζες αυτές υπολογίζονται εύκολα (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) και είναι πραγματικές: $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ και $z_2 = -2 - \sqrt{3}$.



Από αυτές μόνο η z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου. Με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων μπορούμε να γράψουμε:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+4z+1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+4z+1} = 2\pi i \frac{1}{2z_1+4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} i$$

Τελικά θα έχουμε $I = \frac{2}{i}\frac{\pi}{\sqrt{3}} i = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

<u>Τμήμα Α</u> (β)

Η επεξεργασία του θέματος είναι πανομοιότυπη με την ανωτέρω. Θεωρούμε και εδώ τον μοναδιαίο κύκλο *C* με κέντρο την αρχή Ο στα σημεία του οποίου $z = e^{i\theta}$, $\sin\theta = (z - z^{-1})/2i$, $d\theta = dz/iz$. Το προς υπολογισμό πραγματικό ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή του δρομικού ολοκληρώματος:

$$I = \oint_C \frac{1}{2 + \dfrac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = 2\oint_C \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

Η προς ολοκλήρωση ρητή συνάρτηση έχει τους δύο απλούς πόλους $z_1 = (-2+\sqrt{3})i$ και $z_2 = -(2+\sqrt{3})i$ εκ των οποίων μόνο ο z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του *C*. Τελικά βρίσκουμε ότι

$$I = 2\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+4iz-1} = 4\pi i \frac{1}{2z_1+4i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

ΘΕΜΑ 4.

<u>Τμήμα B</u> (α)

Η μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)$ γράφεται κατά σειρά

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{-x}\sin xe^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i}\int_{0}^{+\infty} e^{-(1+ik)x}(e^{ix}-e^{-ix})dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{[-1+(1-k)i]x}-e^{-[1+(1+k)i]x}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i}\left[\frac{e^{[-1+(1-k)i]x}}{-1+(1-k)i}-\frac{e^{-[1+(1+k)i]x}}{1+(1+k)i}\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-k+i}-\frac{1}{1+k-i}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{k^3+(k^2+2)i}{k^4+4}.$$

Τελικά η ζητούμενη μετασχηματισμένη Fourier είναι η

$$\mathcal{F}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{k^3+(k^2+2)i}{k^4+4}. \quad .$$

<u>Τμήμα A</u> (α)

Με εντελώς ανάλογο τρόπο με τον ανωτέρω βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{(1+k)i+1}-\frac{1}{(1-k)i-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{k^2+2-k^3 i}{k^4+4}.$$

<u>Τμήμα B</u> (β)

Ας συμβολίσουμε με $U(k,t)$ την μετασχηματισμένη Fourier (ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) της προς προσδιορισμό συνάρτησης $u(x,t)$. Δηλαδή

$$\mathcal{F}[u(x,t)] \equiv U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx .$$

Αν δράσουμε πάνω στην διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}$ και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα μετασχηματισμού της παραγώγου (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.12) παίρνουμε

$$\frac{1}{4}(ik)^2 U = \frac{\partial U}{\partial t} - ikU \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \left(ik - \frac{k^2}{4} \right) U ,$$

της οποίας η ολοκλήρωση μας δίνει

$$U(k,t) = U(k,0) e^{\left(ik - \frac{k^2}{4} \right) t} .$$

Όμως από την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \delta(x)$ προκύπτει ότι (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», *Παράδειγμα 3* σελ.10)

$$U(k,0) = \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

και έτσι

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(ik - \frac{k^2}{4} \right) t} .$$

Η ζητούμενη λύση προκύπτει με την βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\left[e^{[ik-(k^2/4)]t} \right].$$

Ο υπολογισμός της $\mathcal{F}^{-1}[e^{[ik-(k^2/4)]t}]$ είναι εύκολος[1]. Θα έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{[ik-(k^2/4)]t} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{4}k^2 + i(x+t)k} dk .$$

[1] Δείτε ένα παρόμοιο υπολογισμό στο «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού» *Παράδειγμα 4* σελ.11.

Εδώ παρατηρούμε ότι

$$-\frac{t}{4}k^2 + i(x+t)k = -\left[\left(\frac{\sqrt{t}}{2}k\right)^2 - 2\frac{\sqrt{t}}{2}k\frac{x+t}{\sqrt{t}}i\right] = -\left(\frac{\sqrt{t}}{2}k - \frac{x+t}{\sqrt{t}}i\right)^2 - \frac{(x+t)^2}{t}$$

οπότε

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x+t)^2}{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sqrt{t}}{2}k - \frac{x+t}{\sqrt{t}}i\right)^2} dk$$

Με την αλλαγή $k \to \lambda = (\sqrt{t}/2)k - i(x+t)/\sqrt{t}$ στην μεταβλητή ολοκλήρωσης η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{(x+t)^2}{t}}}{2\pi}\frac{2}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{e^{-\frac{(x+t)^2}{t}}}{2\pi}\frac{2}{\sqrt{t}}\sqrt{\pi}$$

και τελικά

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{(x+t)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}.$$

<u>Τμήμα Α</u> (β)

Εντελώς ανάλογα με το ερώτημα Β(β) βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{F}[u(x,t)] \equiv U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(1-\frac{k^2}{4}\right)t}$$

και στη συνέχεια ότι

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \frac{e^{-\frac{x^2+t^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}.$$