ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

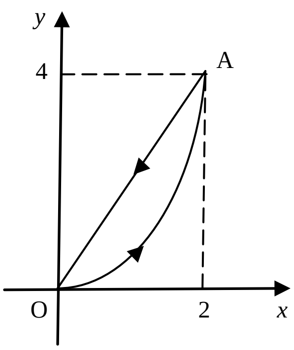
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = y - 2x + i(y - x^2)$ και $f_2(z) = \dfrac{z^2}{8z^3 - i} + \mathrm{Log}(z+i)$ όπου $z = x + iy$ και Logz η κύρια τιμή της συνάρτησης logz.

α) Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει στο σημείο z_0 παράγωγο. Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος Cauchy-Goursat.

β) Προσδιορίστε (αν υπάρχουν) τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία που είναι αναλυτικές. (Η απάντησή σας πρέπει να είναι αιτιολογημένη και να στηρίζεται στην διδαχθείσα θεωρία).



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος ΟΑΟ του σχήματος που αποτελείται από τον παραβολικό ($y = x^2$) δρόμο ΟΑ και τον ευθύγραμμο δρόμο ΑΟ.

ΘΕΜΑ 2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = \dfrac{z+4}{(z-2)(z+1)}$ και $f_2(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

α) Γράψτε την εκφώνηση του θεωρήματος Taylor. Αναπτύξτε σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο $z_0 = 1$ την συνάρτηση $f(z) = e^z$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης αυτής της σειράς;

β) Εξηγείστε γιατί το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z (δηλ. με κέντρο το $z_0 = 0$) στο χωρίο $1 < |z| < 2$ είναι σειρά Laurent. Υπολογίστε αυτή τη σειρά.

γ) Το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f_2(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $|z|>0$ είναι σειρά Laurent ή σειρά MacLaurin; Υπολογίστε σε αυτή την σειρά τους τρείς όρους: $\cdots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$. Τέλος, βασιζόμενοι στα ανωτέρω βρείτε το $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{e^{1/z}-1}$.

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) τα ολοκληρώματα

$$\alpha) \quad \mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx \,, \qquad \beta) \quad \mathrm{I}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(2\pi x)}{x^2+x+1}\,dx \,.$$

ΘΕΜΑ 4. α) Υπολογίστε την μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης (τετραγωνικός παλμός) $f(x) = H(x) - H(x-1)$ όπου $H(x)$ η μοναδιαία συνάρτηση βήματος. Στη συνέχεια βασιζόμενοι στον τύπο Parseval-Plancherel υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos k}{k^2}\,dk$.

β) Εφαρμόστε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{t+1}u \,, \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } -\infty < x < +\infty \,,$$

η οποία συνοδεύεται από τις συνθήκες:

<u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty,t) = u(+\infty,t) = 0$.

<u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0) = f(x)$ όπου $f(x)$ η συνάρτηση του ερωτήματος (α).

<u>Υπόδειξη</u>: Η ζητούμενη συνάρτηση $u(x,t)$ γράφεται τελικά στην μορφή ενός ολοκληρώματος που δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί όμως να εκφρασθεί απλά μέσω της «συνάρτησης σφάλματος» (error function) που ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2}\,d\zeta \quad .$$