ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Μια συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ έχει παράγωγο σε ένα σημείο $z_0=x_0+iy_0$ αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

i) Οι πρώτες μερικές παράγωγοι $u_x(x,y),\ u_y(x,y),\ v_x(x,y),$ $v_y(x,y)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σημείο (x_0,y_0).

ii) Στο σημείο (x_0,y_0) επαληθεύονται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Επί τούτου κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.12. Σημειώστε ότι μια συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ που έχει παράγωγο σε ένα σημείο z_0 δεν είναι εκεί απαραίτητα και αναλυτική. Για να είναι αναλυτική θα πρέπει επί πλέον να υπάρχει γειτονιά του z_0 σε όλα τα σημεία της οποίας η $f(z)$ να έχει παράγωγο. (Κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.14).

Θεώρημα Cauchy-Goursat: Κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.30

β) Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $f_1(z)$ είναι:

$$u(x,y)=y-2x,\ \ v(x,y)=y-x^2.$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι $u_x=-2,\ u_y=1,\ v_x=-2x,\ v_y=1$ είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x,y*. Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ γράφονται:

$$-2=1,\ \ 1=2x.$$

Η πρώτη από αυτές τις δύο εξισώσεις δεν μπορεί να ικανοποιηθεί σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Συμπεραίνουμε ότι η $f_1(z)$ δεν έχει παράγωγο πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο και επομένως δεν είναι και πουθενά αναλυτική.

Η συνάρτηση $f_2(z)$ ως το άθροισμα της ρητής συνάρτησης $z^2/(8z^3-i)$ και της συνάρτησης $\mathrm{Log}(z+i)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία που κάποια από αυτές τις δύο συναρτήσεις δεν είναι αναλυτική. Η πρώτη δεν είναι αναλυτική στα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της εξίσωσης $8z^3-i=0$. Αυτές είναι οι $z_1=e^{i\pi/6}/2=(\sqrt{3}+i)/4$, $z_2=-i/2$, $z_3=e^{i5\pi/6}/2=(-\sqrt{3}+i)/4$. (Ο υπολογισμός τους έχει ως εξής: Επειδή $|z|=1/2$ αναζητούμε τις ρίζες στην μορφή $z=e^{i\theta}/2$. Η προς επίλυση αλγεβρική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $e^{3i\theta}=e^{i\pi/2}$ και από αυτή παίρνουμε $3\theta=2k\pi+\pi/2$ με $k=-1,0,1,$. Τελικά τα ορίσματα των ριζών είναι $\theta_1=\pi/6$, $\theta_2=-\pi/2$, $\theta_3=5\pi/6$). Η $\mathrm{Log}(z+i)$ δεν είναι παραγωγίσιμη ούτε και αναλυτική στα σημεία της εγκοπής κλάδου[1] που προσδιορίζονται από τις: $\mathrm{Im}(z+i)=0$, και $\mathrm{Re}(z+i)\le 0$. Αυτά προφανώς είναι τα σημεία $z=x-i$ με $x\le 0$.

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_1.

Επειδή η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο είμαστε αναγκασμένοι για τον υπολογισμό του δρομικού ολοκληρώματος να προχωρήσουμε σε παραμετροποίηση. Ο βρόχος *C* αποτελείται από τα δύο παραβολικό τόξο ΟΑ , και το ευθύγραμμο τόξο ΑΟ. Η παραμετρική εξίσωση για καθένα από αυτά έχει ως εξής:

Για το ΟΑ : Εδώ $y=x^2$ και άρα $z(x)=x+ix^2$ με $0\le x\le 2$. Ενώ $f_1(z)=x^2-2x$.

Για το ΑΟ: Εδώ $y=2x$ και άρα $z(x)=(1+2i)x$ με $0\le x\le 2$. Ενώ $f_1(z)=i(2x-x^2)$.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε κάθε δρόμο θα είναι:

$$\int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz=\int_0^2 (x^2-2x)(1+2i)dx=(1+2i)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg\|_0^2=-(1+2i)\frac{4}{3}\ .$$

$$\int_{\mathrm{AO}} f_1(z)dz=\int_2^0 i(2x-x^2)(1+2i)dx=(i-2)\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg\|_2^0=-(i-2)\frac{4}{3}$$

[1] Κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.20

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz + \int_{\mathrm{AO}} f_1(z)dz = -\frac{4}{3}(1+2i) - \frac{4}{3}(i-2) = \frac{4}{3} - 4i \text{ .}$$

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_2.

Η συνάρτηση $\mathrm{Log}(z+i)$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του βρόχου *C* (τα σημεία της εγκοπής κλάδου είναι όλα έξω από τον βρόχο) οπότε από το θεώρημα Cauchy-Goursat

$$\oint_C \mathrm{Log}(z+i)dz = 0 .$$

Έτσι,

$$\oint_C f_2(z)dz = \oint_C \mathrm{Log}(z+i)dz + \oint_C \frac{z^2}{8z^3 - i}dz = \oint_C \frac{z^2}{8z^3 - i}dz \ .$$

Τα σημεία z_2 , z_3 βρίσκονται προφανώς έξω από τον βρόχο. Το σημείο z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του *C* αφού $0 < \sqrt{3}/4 < 2$ και $\sqrt{3}/4\ ^{2} < 1/4 < \sqrt{3}/4$. Τελικά

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left(\frac{z^2}{8z^3 - i}\right) = 2\pi i \frac{z_1^{\ 2}}{24z_1^{\ 2}} = \frac{\pi}{12}i \ .$$

ΘΕΜΑ 2.

α) Θεώρημα Taylor: Δείτε τις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.49.

Η συνάρτηση e^z είναι ακεραία αναλυτική. Επομένως σε κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου αναλύεται σε σειρά Taylor με άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

για $z_0 = 1$ και επειδή $f^{(n)}(z_0) = e^{z_0} = e$ παίρνουμε

$$f(z) = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} \ .$$

β) Στον εσωτερικό κυκλικό δίσκο $|z| \le 1$ του δακτυλιοειδούς χωρίου $1 < |z| < 2$ υπάρχει το ανώμαλο σημείο $z = -1$ της $f_1(z)$. Άρα το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z (κέντρο το 0) είναι σειρά Laurent. Για τον υπολογισμό της σειράς αναλύουμε πρώτα την $f_1(z)$ σε απλά κλάσματα:

$$f_1(z) = \frac{z+4}{(z-2)(z+1)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z+1} \ .$$

Μετά αναλύουμε σε σειρά στο χωρίο $1 < |z| < 2$ καθένα από τα απλά κλάσματα:

$$\frac{2}{z-2} = \frac{-1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \text{ διότι } \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}, \text{ διότι } \left|\frac{1}{z}\right| < 1.$$

Τελικά

$$f_1(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} \ .$$

γ) Στο χωρίο $|z| > 0$ η $f_2(z)$ είναι παντού αναλυτική. Το χωρίο αυτό είναι δακτυλιοειδές όπου όμως ο εσωτερικός «δακτύλιος» είναι το σημείο $z = 0$. Το σημείο αυτό είναι αιρώμενο ανώμαλο σημείο για την $f_2(z)$. Πράγματι, αν $z \ne 0$ τότε

$$f_2(z) = \frac{z}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - 1} = \frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}} \ .$$

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$ συγκλίνει σε όλο το μιγαδικό επίπεδο (δείτε το θεώρημα 6.10 σελ.48 στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού») και επομένως ορίζει μια ακεραία αναλυτική συνάρτηση $g(z)$ με $g(0)=1$ (δείτε το θεώρημα 6.11 σελ.49 στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού») . Θέτοντας $f_2(0)=1$ κάνουμε τη συνάρτηση $f_2(z)$ αναλυτική στο σημείο 0 και επομένως και ακεραία αναλυτική. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ανάπτυγμα της $f_2(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z είναι σειρά MacLaurin. Οι τρείς πρώτοι όροι της σειράς μπορούν να υπολογισθούν ή μέσω του τύπου

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_2^{(n)}(0)=f_2(0)+\frac{1}{2}f_2'(0)z+\frac{1}{6}f_2''(0)z^2+\cdots$$

ή ως εξής:

$$f_2(z)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots \quad \Rightarrow$$

$$1=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\cdots\right)=a_0+\left(a_1+\frac{a_0}{2}\right)z+\left(a_2+\frac{a_1}{2}+\frac{a_0}{6}\right)z^2+\cdots$$

Από αυτή τη σχέση παίρνουμε $a_0=1$, $a_1=-1/2$, $a_2=1/12$ και τελικά

$$f_2(z)=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2+\cdots$$

Από τα ανωτέρω είναι πλέον σαφές ότι το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z της συνάρτησης $zf_2(1/z)=1/(e^{1/z}-1)$ στο χωρίο $|z|>0$ είναι μια σειρά Laurent. Οι τρείς πρώτοι όροι αυτής της σειράς προκύπτουν από την τελευταία σχέση και είναι:

$$\frac{1}{e^{1/z}-1}=z-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\frac{1}{z}+\cdots$$

Το $\operatorname*{Res}_{z=0}\left[1/(e^{1/z}-1)\right]$ είναι ο συντελεστής του όρου ως προς $1/z$ σε αυτή τη σειρά δηλαδή

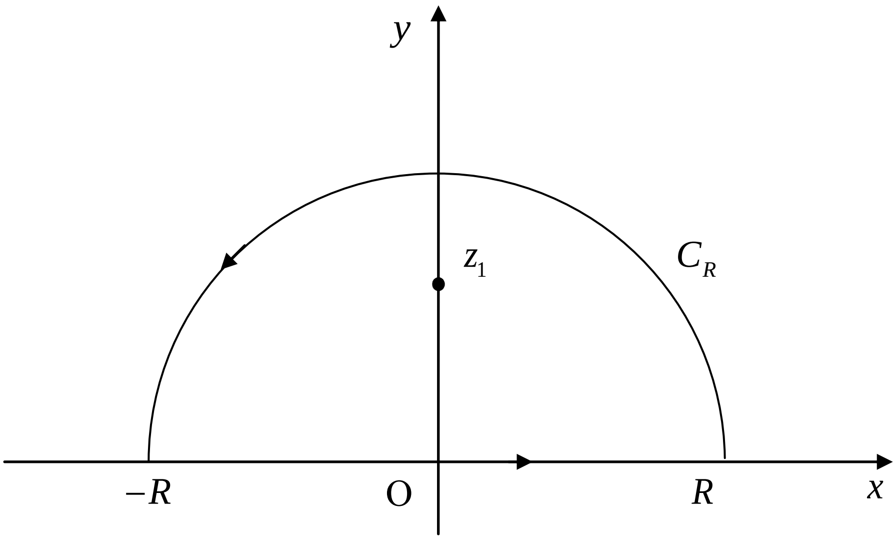
$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[1/(e^{1/z}-1)\right]=\frac{1}{12}\ .$$

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $f(z)$ ως ρητή είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δύο τριπλές ρίζες $z_1 = i$ και $z_2 = -i$ του παρονομαστή. Παρατηρούμε ότι από αυτές τις ρίζες η z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y > 0$) ενώ η z_2 βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο ($y < 0$).



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z).$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z_1 = i$ (που είναι τριπλός πόλος της $f(z)$) γράφεται

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i}\left[\frac{1/(z+i)^3}{(z-i)^3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]''_{z=i} = \frac{1}{2}\frac{12}{(z+i)^5}\Bigg\|_{z=i} = \frac{6}{2^5 i^5} = \frac{3}{16i} \ ,$$

και επομένως

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{8}.$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια της ανισότητας Darboux (βλέπε σημειώσεις Μιγαδ. Λογ. σελ. 27 εξίσωση (5.14)) ότι $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.

Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για τα σημεία z πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R > |z_1| = 1$) για να πάρουμε:

$$|z^2+1| \geq \left||z^2|-1\right| = R^2 - 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^3}.$$

Άρα πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)| \leq M \equiv \frac{1}{(R^2-1)^3}.$$

Τώρα η ανισότητα Darboux γράφεται $0 \leq \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \dfrac{1}{(R^2-1)^3}\pi R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Άρα $\lim\limits_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = 0 \ \Rightarrow \ \lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.

Τελικά αποδείξαμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{3\pi}{8} \quad .$$

Όμως η συνάρτηση $1/(x^2+1)^3$ είναι άρτια και η τελευταία εξίσωση μας δίνει

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{3\pi}{16} \ .$$

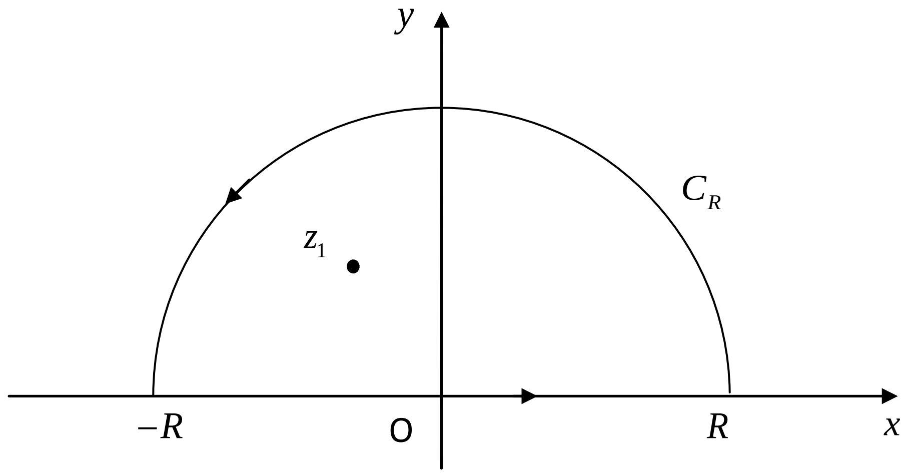
β) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z) = f(z)e^{i2\pi z}, \text{ όπου } \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1} \ ,$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $g(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δύο απλές ρίζες της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$. Οι ρίζες αυτές είναι

$$z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \ , \quad z_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \ .$$

Παρατηρούμε ότι από αυτές τις ρίζες μόνο οι z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y > 0$) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των x.



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C και την συνάρτηση $g(z)$ μας δίνει

$$\oint g(z)dz = \int_{C_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) \ .$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) \qquad (3.1)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_1 (που είναι απλός πόλος της $g(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) = \frac{z_1}{2z_1+1} e^{i2\pi z_1} = \frac{1}{2}\frac{-1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} e^{i\pi(-1+i\sqrt{3})} = -\frac{-1+i\sqrt{3}}{i2\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}} \quad .$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = -\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \pi e^{-\pi\sqrt{3}} . \qquad (3.2)$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια του λήμματος Jordan (δείτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ. 78) ότι $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0$. Γι' αυτό το σκοπό παρατηρούμε ότι πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R$) ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\left|z^2+z+1\right| = \left|(z-z_1)(z-z_2)\right| \ge \left||z|-1\right|^2 = \ R-1\ ^2 \Rightarrow \frac{1}{\left|z^2+z+1\right|} \le \frac{1}{(R-1)^2} \ ,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $|z_1| = |z_2| = 1$. Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)| \le M_R \equiv \frac{R}{(R-1)^2} \ .$$

Τώρα επειδή $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ από το λήμμα Jordan έπεται ότι $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0$ και έτσι η σχέση (3.2) γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i2\pi x}}{x^2+x++1} dx = -\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \pi e^{-\pi\sqrt{3}} \ .$$

Από αυτήν παίρνοντας τα φανταστικά μέρη και των δύο μελών προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(2\pi x)}{x^2+x++1} dx = -\pi e^{-\pi\sqrt{3}} .$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Η μετασχηματισμένη Fourier γράφεται

$$\mathcal{F}[f(x)] \equiv F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \ ,$$

όπου

$$f(x) = H(x) - H(x-1) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αν } \ x < 0 \ \text{ ή } \ x > 1 \end{cases}$$

Οπότε

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ikx} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi} k} e^{-ikx} \Big\|_0^1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi} k} (e^{-ik} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} k} [\sin k + i(\cos k - 1)]$$

.

Εδώ τύπος Parseval –Plancherel γράφεται (δείτε στο ecourse το «Συμπλήρωμα Σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού» εξίσωση (3.3) σελ.18):

$$\int_0^1 1^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 - 2\cos k}{k^2} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos k}{k^2} dk \ .$$

Από αυτόν αμέσως προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos k}{k^2} dk = \pi \ ,$$

ή ακόμα, επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos k}{k^2} dk = \frac{\pi}{2} \ .$$

β) Αν δράσουμε πάνω στην προς επίλυση διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}$ και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα μετασχηματισμού της παραγώγου (δείτε το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.12) παίρνουμε

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k^2 U + \frac{1}{t+1} U \,,$$

της οποίας η ολοκλήρωση μας δίνει

$$U(k,t) = U(k,0)(t+1)e^{-k^2 t}. \qquad (4.1)$$

Η $U(k,0)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Δηλαδή έχουμε$U(k,o) = F(k)$ και$\mathcal{F}^{-1}[U(k,o)] = f(x)$. Η αντίστροφη μετασχηματισμένη της $e^{-k^2 t}$ έχει υπολογισθεί στο «Συμπλήρωμα Σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού» Παράδειγμα 5 σελ.14. Εκεί βρήκαμε ότι

$$g(x,t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[e^{-k^2 t}] = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{2t}} \;.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα της συνέλιξης (Δείτε στο «Συμπλήρωμα Σημειώσεων, σελ.18, Ιδιότητα 7) για την εξίσωση (4.1) παίρνουμε

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[U(k,0)(t+1)e^{-k^2 t}\right] = (t+1)\mathcal{F}^{-1}\left[U(k,0)e^{-k^2 t}\right] =$$

$$= \frac{t+1}{\sqrt{2\pi}} f(x) * g(x,t) = \frac{t+1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y,t) dy = \frac{t+1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{2t}} dy =$$

$$= \frac{t+1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 e^{-(x-y)^2/4t} dy \;.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί με την αλλαγή $\zeta = (y-x)/2\sqrt{t}$ στη μεταβλητή ολοκλήρωσης να γραφεί ως εξής:

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^1 e^{-(x-y)^2/4t} dy = \int_{-x/2\sqrt{t}}^{(1-x)/2\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_{-x/2\sqrt{t}}^{0} e^{-\zeta^2} d\zeta + \int_0^{(1-x)/2\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} d\zeta =$$

$$= -\int_0^{-x/2\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} d\zeta + \int_0^{(1-x)/2\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} d\zeta + \int_0^{(1-x)/2\sqrt{t}} e^{-\zeta^2} d\zeta =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

Τελικά η λύση του προβλήματος γράφεται

$$u(x,t)=\frac{t+1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$