ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

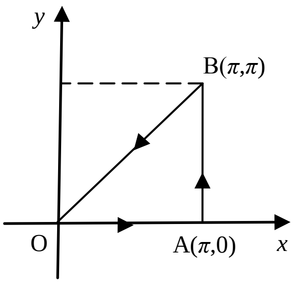
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1(z) = \sin x + i \sin y \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{\tan(z-i)}{\sin z + \sqrt{2}} \quad \text{όπου} \quad z = x + iy .$$

α) Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει στο σημείο z_0 παράγωγο. Πότε μια συνάρτηση λέγεται αναλυτική στο σημείο z_0;

β) Προσδιορίστε (αν υπάρχουν) τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία που είναι αναλυτικές.



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad I_2 = \oint_C f_2(z)dz$$

όπου C ο θετικά προσανατολισμένος τριγωνικός βρόχος ΟΑΒ του σχήματος.

ΘΕΜΑ 2.

α) Έστω ότι το σημείο z_0 είναι ένα ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης $f(z)$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Πότε το z_0 λέγεται μεμονωμένο ανώμαλο σημείο;
- Πότε το z_0 λέγεται ουσιώδες ανώμαλο σημείο;
- Πότε το z_0 λέγεται πόλος τάξης *m*;

β) Εξηγείστε γιατί το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f_1(z)=\dfrac{4z}{(z-1)(z+3)}$ σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $1<|z|<3$ είναι μια σειρά Laurent. Στη συνέχεια υπολογίστε αυτή τη σειρά.

γ) Υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z=0$ για τη συνάρτηση $f_2(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}e^{1/z}$.

ΘΕΜΑ 3.

Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$, β) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{(3-2\cos\theta-2\sin\theta)^2}$.

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογίστε την μετασχηματισμένη Fourier $\mathcal{F}[f(x)]\equiv F(k)$ της συνάρτησης $f(x)=e^{-|x|}$ με $-\infty<x<+\infty$. Από το αποτέλεσμα που θα βρείτε να συνάγετε (με επίκληση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier) την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{1+x^2}dx \ .$$

β) Εφαρμόστε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$2t\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+u=0 \ , \quad \text{με } t\geq 0 \quad \text{και} \quad -\infty<x<+\infty \ ,$$

η οποία συνοδεύεται από τις συνθήκες:

Συνοριακές συνθήκες: $u(-\infty,t)=u(+\infty,t)=0$.

Αρχική συνθήκη: $u(x,0)=f(x)$ όπου $f(x)$ η συνάρτηση του ερωτήματος (α).