ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.12 και σελ.14.

β) Για την $f_1(z)$:

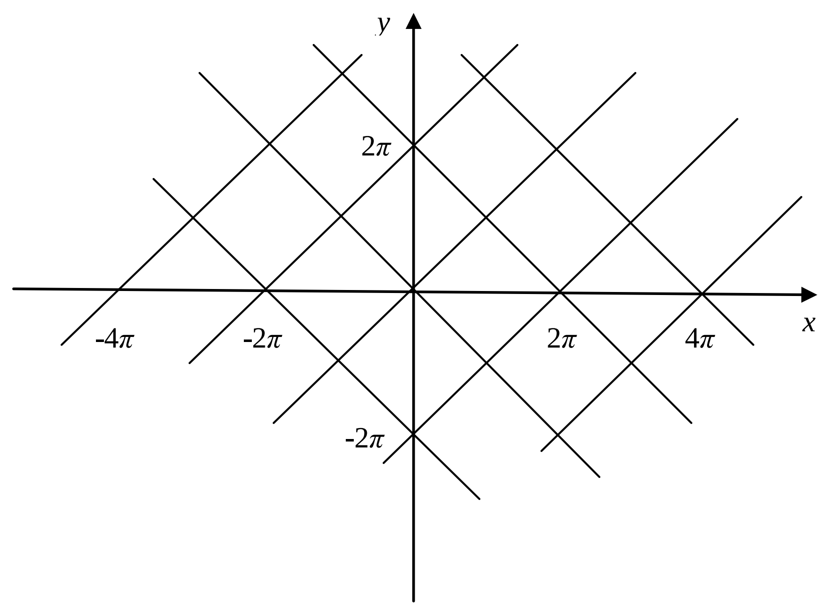
Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $f_1(z)$ είναι:

$$u(x,y)=\sin x,\quad v(x,y)=\sin y.$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι $u_x=\cos x$, $u_y=\cos y$, $v_x=v_y=0$ είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x,y*. Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ γράφονται:

$$\cos x=\cos y,\quad 0=0.$$

Για να ικανοποιούνται θα πρέπει $y=x+2k\pi$ ή $y=-x+2k\pi$ όπου k τυχών ακέραιος αριθμός ($k\in\mathbb{Z}$), ή ισοδύναμα, $z=(1+i)x+2k\pi i$ και $z=(1-i)x+2k\pi i$ με $x\in\mathbb{R}$. Οι παραμετρικές αυτές εξισώσεις περιγράφουν στο μιγαδικό επίπεδο δύο άπειρες οικογένειες ευθειών (ορθογώνιες μεταξύ τους) όπως φαίνεται στο σχήμα.



Πάνω σε αυτές τις δύο οικογένειες ευθειών η $f_1(z)$ έχει παράγωγο που δίνεται από την σχέση $f_1'(z) = u_x + iv_x = \cos x$. Όμως, η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία αυτών των ευθειών παρά του ότι εκεί έχει παράγωγο. Αυτό γιατί όποια γειτονιά ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στις ευθείες κι' αν θεωρήσουμε θα υπάρχουν σημεία μέσα στην γειτονιά που δεν ανήκουν στις ευθείες και σε αυτά η συνάρτηση δεν θα παραγωγίζεται. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η $f_1(z)$ είναι παραγωγίσιμη πάνω στις δύο οικογένειες ευθειών $z = (1+i)x + 2k\pi i$ και $z = (1-i)x + 2k\pi i$ με $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$ ενώ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου.

Για την $f_2(z)$:

Γνωρίζουμε ότι συνάρτηση $\sin z$ είναι ακεραία αναλυτική και άρα και η $\sin z + \sqrt{2}$ είναι ακεραία αναλυτική. Επίσης γνωρίζουμε ότι η $\tan(z-i)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία $z - i = k\pi + \pi/2$ με $k \in \mathbb{Z}$ ή ισοδύναμα $z = (k+1/2)\pi + i$ όπου δεν είναι αναλυτική. Συνεπώς η $f_2(z)$ ως πηλίκο των ανωτέρω συναρτήσεων είναι αναλυτική (και επομένως και παραγωγίσιμη) παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία $z = (k+1/2)\pi + i$, $k \in \mathbb{Z}$ και τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της εξίσωσης $\sin z + \sqrt{2} = 0$ τα οποία και θα προσδιορίσουμε τώρα.

Ρίζες της $\sin z + \sqrt{2} = 0$:

Θέτουμε $e^{iz} = w$ και η εξίσωση γράφεται

$$(w - w^{-1})/2i + \sqrt{2} = 0 \;\Rightarrow\; w^2 + 2\sqrt{2}iw - 1 = 0 .$$

Οι ρίζες της είναι $w = -(\sqrt{2} \pm 1)i$ ή $e^{iz} = (\sqrt{2} \pm 1)e^{-(\pi/2)i}$. Από αυτή με την βοήθεια της (πλειότιμης) συνάρτησης $\log z$ παίρνουμε[1]

$iz = \log\left[(\sqrt{2} \pm 1)e^{-(\pi/2)i}\right] = \ln(\sqrt{2} \pm 1) + (-\pi/2 + 2k\pi)i$ και τελικά

[1] Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού είναι ο εξής: Θέτουμε $z = x + iy$ οπότε $w = e^{iz} = e^{ix}e^{-y} = (\sqrt{2} \pm 1)e^{-(\pi/2)i} \;\Rightarrow\; e^{-y} = \sqrt{2} \pm 1,\; x = -\pi/2 - 2k\pi \;\Rightarrow\; y = -\ln(\sqrt{2} \pm 1),\; x = -(1/2 + 2k)\pi$

$$z=-\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi-i\ln\ \sqrt{2}\pm 1 \quad \text{με } k\in\mathbb{Z}\ .$$

γ) <u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_1.

Επειδή η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική πουθενά στο μιγαδικό επίπεδο είμαστε αναγκασμένοι για τον υπολογισμό του δρομικού ολοκληρώματος να προχωρήσουμε στην παραμετροποίηση του. Ο τριγωνικός βρόχος C αποτελείται από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΑΒ, ΒΟ. Η παραμετρική εξίσωση για καθένα από αυτά έχει ως εξής:

Για το ΟΑ: Εδώ $y=0$ και άρα $z(x)=x$, με $0\le x\le\pi$. Ενώ $f_1(z)=\sin x$.

Για το ΑΒ: Εδώ $x=\pi$ και άρα $z(y)=\pi+iy$, με $0\le y\le\pi$. Ενώ $f_1(z)=i\sin y$.

Για το ΒΟ: Εδώ $y=x$ και άρα $z(x)=(1+i)x$ με $0\le x\le\pi$. Ενώ $f_1(z)=(1+i)\sin x$.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα θα είναι:

$$\int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big\|_0^{\pi}=2\ .$$

$$\int_{\mathrm{AB}} f_1(z)dz=\int_0^{\pi}(i\sin y)idy=\cos y\Big\|_0^{\pi}=-2\,.$$

$$\int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz=\int_{\pi}^{0}[(1+i)\sin x](1+i)dx=(1+i)^2\int_{\pi}^{0}\sin x dx=2i(-\cos x)\Big\|_{\pi}^{0}=-4i\,.$$

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz=\int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz+\int_{\mathrm{AB}} f_1(z)dz+\int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz=2-2-4i+0=-4i\,.$$

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u> I_2.

Επειδή τα ανώμαλα σημεία (απλοί πόλοι) της συνάρτησης $f_2(z)$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και εφόσον κανένα από αυτά δεν βρίσκεται πάνω στον δρόμο ολοκλήρωσης το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Άρα το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε την θέση αυτών των σημείων στο μιγαδικό επίπεδο, να βεβαιωθούμε ότι κανένα από αυτά δεν βρίσκεται πάνω στον C , και τέλος να πρέπει να βρούμε ποια από αυτά βρίσκονται στο εσωτερικό του C. Παρατηρούμε ότι αν κάποιο ανώμαλο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ της $f_2(z)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου C θα πρέπει $0 < x_0 < \pi$. Τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της $\sin z + \sqrt{2} = 0$ έχουν πραγματικό μέρος $(-1/2 + 2k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και δεν πληρούν αυτή την απαίτηση και άρα βρίσκονται όλα έξω από τον C. Από τα σημεία $z = (k + 1/2)\pi + i$, $k \in \mathbb{Z}$ μόνο το $z_0 = \pi/2 + i$ με $x_0 = \pi/2$ πληροί αυτή την απαίτηση. Επειδή επιπρόσθετα $1 < \pi/2$ το σημείο αυτό βρίσκεται μέσα στον C. Θα έχουμε λοιπόν με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) \ .$$

Το z_0 είναι απλός πόλος της $f_2(z)$ οπότε

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) = \frac{1}{\sin z + \sqrt{2}} \frac{\sin(z-i)}{\cos(z-i)\,'}\Bigg\|_{z=z_0} = -\frac{1}{\sin z_0 + \sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + i\right) + \sqrt{2}} = -\frac{1}{\cos i + \sqrt{2}} = -\frac{1}{\dfrac{e^{-1} + e}{2} + \sqrt{2}} = -\frac{2e}{e^2 + 2\sqrt{2}e + 1}$$

Τελικά

$$I_2 = -\frac{4\pi e}{e^2 + 2\sqrt{2}e + 1} i \ .$$

ΘΕΜΑ 2.

α) Κοιτάξτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού» σελ.62 και σελ.63.

β) Τα σημεία $z = 1$ και $z = -3$ είναι απλοί πόλοι της ρητής συνάρτησης $f_1(z)$. Επειδή στον εσωτερικό δακτύλιο $|z| \leq 1$ του χωρίου $1 < |z| < 3$ υπάρχει ανώμαλο σημείο (το σημείο $z = 1$) το ζητούμενο ανάπτυγμα σε σειρά θα είναι σειρά Laurent.

Για τον υπολογισμό της σειράς Laurent αναλύουμε πρώτα την $f_1(z)$ σε απλά κλάσματα:

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+3} \ .$$

Στο χωρίο $1 < |z| < 3$ έχουμε $|z/3| < 1$ και $|1/z| < 1$. Έτσι καθένα από τα απλά κλάσματα θα έχει το εξής ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} \ ,$$

$$\frac{3}{z+3} = \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} \ .$$

Τελικά το ζητούμενο ανάπτυγμα γράφεται

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n} \ .$$

γ) Το σημείο $z = 0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f_2(z)$. Το ζητούμενο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι ο συντελεστής του όρου ως προς $1/z$ στο ανάπτυγμα Laurent της $f_2(z)$ στο χωρίο $0 < |z| < 1$. Σε αυτό το χωρίο γράφουμε αρχικά τα αναπτύγματα των συναρτήσεων $e^{1/z}$ και $1/(1-z)^2$ σε σειρά δυνάμεων του z :

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (\text{σειρά Laurent στο χωρίο } 0 < |z| < 1) \ .$$

Η συνάρτηση $1/(1-z)$ επειδή είναι αναλυτική παντού στο χωρίο $|z| < 1$ θα έχει εκεί το ανάπτυγμα σε σειρά MacLaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad (\text{για } |z| < 1).$$

Το ανάπτυγμα αυτό μπορεί να παραγωγισθεί όρο προς όρο (Θεώρημα 6.11 σελ.49 στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού») για να μας δώσει

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \quad (\text{για } |z|<1).$$

Από τα ανωτέρω είναι πλέον σαφές ότι το ανάπτυγμα Laurent της $f_2(z)$ στο χωρίο $0<|z|<1$ θα είναι:

$$f_2(z)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}z^m\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n+1}{m!}z^{n-m} \quad .$$

Ο όρος ως προς $1/z$ στην σειρά αυτή λαμβάνεται για την τιμή δείκτη $m=n+1$. Ο συντελεστής αυτού του όρου είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e \quad .$$

ΘΕΜΑ 3.

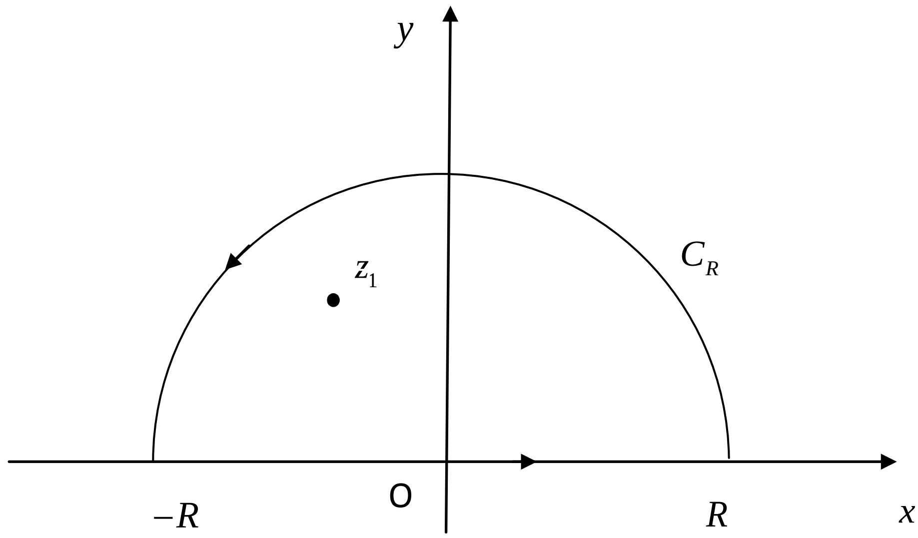
α) Υπολογισμός του $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δύο ρίζες της εξίσωσης $z^2+z+1=0$. Οι ρίζες αυτές γράφονται

$$z_1=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\ \text{και}\ \ z_2=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Παρατηρούμε ότι από αυτές μόνο η z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y>0$) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των x. Αν δε $R>1$ το σημείο z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου C.



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C με $R>1$ και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z). \tag{3.1}$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_1 (που είναι απλός πόλος της $f(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^2+z+1}\Bigg\|_{z=z_1} = \frac{1}{(z^2+z+1)'}\Bigg\|_{z=z_1} = \frac{1}{2z_1+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \tag{3.2}$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Πράγματι, επικαλούμενοι την τριγωνική ανισότητα και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$|z_1| = |z_2| = 1$ παρατηρούμε ότι πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R$) θα ισχύει η ανισότητα:

$$|z^2 + z + 1| = |(z - z_1)(z - z_2)| \geq \big||z| - |z_1|\big|\big||z| - |z_2|\big| = (R-1)^2$$

Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2 + z + 1}\right| \leq \frac{1}{(R-1)^2}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Darboux για την $f(z)$ και τον δρόμο C_R λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος του C_R είναι πR και παίρνουμε

$$0 \leq \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \pi R \frac{1}{(R-1)^2} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz\right| = 0$$

Αλλά τότε και

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Από την σχέση (3.2) προκύπτει τώρα ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

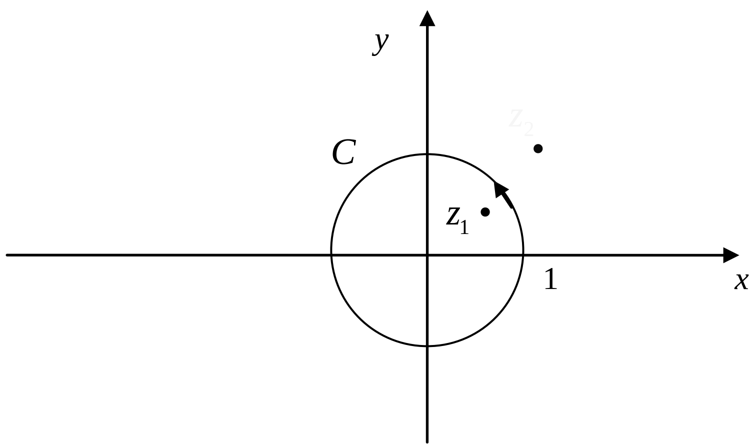
<u>Υπολογισμός του</u> $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3 - 2\cos\theta - 2\sin\theta)^2}$.

Το ολοκλήρωμα αυτό εντάσσεται στην γενική κατηγορία των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $z(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Κατ’ αυτό τον τρόπο το αρχικό πραγματικό ολοκλήρωμα θα προκύπτει με τη παραμετροποίηση αυτού του δρομικού ολοκληρώματος.

Πάνω στον μοναδιαίο κύκλο C με κέντρο την αρχή θα έχουμε λοιπόν $z=e^{i\theta}$, $\cos\theta=(z+z^{-1})/2$, $\sin\theta=(z-z^{-1})\big/2i=-i(z-z^{-1})\big/2$ και $d\theta=dz/iz=(-i/z)dz$. Έτσι το προτεινόμενο προς υπολογισμό ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή του δρομικού ολοκληρώματος

$$\mathrm{I}=\oint_C \frac{1}{\left[3-(z+z^{-1})+i(z-z^{-1})\right]^2}\frac{dz}{iz}=\oint_C \frac{-iz}{\left[(i-1)z^2-+3z-1-i\right]^2}dz \;.$$

Εδώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο προσανατολισμένο κατά την θετική φορά είναι ρητή και επομένως αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή που είναι διπλοί πόλοι. Αυτές υπολογίζονται εύκολα (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) και είναι $z_1=(1+i)\big/2$ και $z_2=1+i=2z_1$. Επειδή $|z_1|=1\big/\sqrt{2}<1$ και $|z_2|=\sqrt{2}>1$ μόνο η z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του C.



Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων και αφού λάβουμε υπόψη ότι ο πόλος z_1 είναι διπλός παίρνουμε

$$\mathrm{I} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{-iz}{(i-1)(z-z_1)(z-z_2)^{\ 2}} = \frac{2\pi}{(i-1)^2}\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]'\Bigg\|_{z=z_1} =$$

$$= -i\pi \frac{z+z_2}{(z-z_2)^3}\Bigg\|_{z=z_1} = -i\pi \frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} = -i\pi \frac{3z_1}{(-z_1)^3} = i\pi \frac{3}{z_1^{\ 2}} = 6\pi$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Υπολογισμός της μετασχηματισμένης Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-|x|}$:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ik)x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+ik)x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x} \Bigg\|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+ik} e^{-(1+ik)x} \Bigg\|_{0}^{+\infty} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+k^2} \ .$$

Η δράση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier πάνω στην $F(k)$ μας δίνει:

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ixk}}{1+k^2} dk \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixk}}{1+k^2} dk = \pi e^{-|x|} \ . \qquad (4.1)$$

Η εξίσωση αυτή με εναλλαγή στην ονομασία των μεταβλητών x και k (οι οποίες λαμβάνουν τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$) γράφεται ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|} \ .$$

Σημειώστε ότι η τελευταία αυτή εξίσωση θα μπορούσε να γραφεί άμεσα βάσει της *αρχής της συμμετρίας* (δείτε το συμπλήρωμα των σημειώσεων στο e-course, σελ. 17).

β) Ας συμβολίσουμε με $U(k,t)$ την μετασχηματισμένη Fourier (ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) της προς προσδιορισμό συνάρτησης $u(x,t)$. Δηλαδή

$$\mathcal{F}[u(x,t)] \equiv U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx .$$

Η αρχική συνθήκη για $t=0$ εισαγόμενη σε αυτή την σχέση μας δίνει

$$U(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F(k) ,$$

Αν δράσουμε πάνω στην διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}$ και χρησιμοποιήσουμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού και την ιδιότητα μετασχηματισμού της παραγώγου (βλέπε στο e-course το «Συμπλήρωμα σημειώσεων Μιγαδικού Λογισμού», σελ.17) παίρνουμε

$$2tikU + \frac{\partial U}{\partial t} + U = 0 ,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -(1+2ikt)U .$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια συνήθης πρωτοτάξια γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση γράφεται

$$U(k,t) = U(k,0) e^{-t} e^{-ikt^2} .$$

Η «σταθερά ολοκλήρωσης» $U(k,0)$ προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη και όπως είδαμε είναι $U(k,0) = F(k)$. Βρήκαμε έτσι ότι

$$U(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-t} \frac{e^{-ikt^2}}{1+k^2} .$$

Δρώντας τώρα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier πάνω στην $U(k,t)$ λαμβάνουμε τη ζητούμενη λύση:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(k,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-t} \frac{e^{-ikt^2}}{1+k^2} e^{ikx} dk = \frac{e^{-t}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-t^2)k}}{1+k^2} dk \ .$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος αυτής της ισότητας προκύπτει άμεσα με τη βοήθεια της εξίσωσης (4.1) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-t^2)k}}{1+k^2} dk = \pi e^{-\left|x-t^2\right|} \ .$$

Τελικά,

$$u(x,t) = e^{-t} e^{-\left|x-t^2\right|} \ .$$

Σημειώστε ότι ο υπολογισμός της αντίστροφης μετασχηματισμένης Fourier $\mathcal{F}^{-1}[U(k,t)]$ μπορεί να γίνει εύκολα και με εφαρμογή της ιδιότητας «Μετατόπιση της ανεξάρτητης μεταβλητής» του μετασχηματισμού Fourier. (Δείτε το συμπλήρωμα των σημειώσεων στο e-course, σελ.17 ιδιότητα (2)): Πράγματι, όπως δείξαμε στο ερώτημα (α) έχουμε $\mathcal{F}^{-1}\left[(2/\pi)(1/1+k^2)\right] = e^{-|x|}$ οπότε με εφαρμογή αυτής της ιδιότητας (και της γραμμικότητας του μετασχηματισμού) θα έχουμε

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-t} \frac{e^{-ikt^2}}{1+k^2}\right] = e^{-t} \mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-ikt^2}}{1+k^2}\right] = e^{-t} e^{-\left|x-t^2\right|} \ .$$