ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛ. ΜΕΤΑΣΧ.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ. ΚΟΛΑΣΗΣ

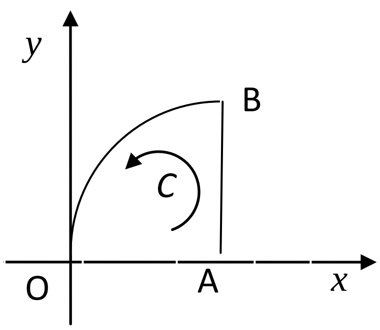
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ 1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1(z) = 3x - iy \quad \text{και} \quad f_2(z) = \frac{z^2}{(z^3 - i)\cos(i\pi z)} \quad \text{όπου } z = x + iy\,.$$

α) Γράψτε ικανές συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(z)$ να έχει στο σημείο z_0 παράγωγο. Πότε η $f(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο z_0;

β) Προσδιορίστε (αν υπάρχουν) τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία οι συναρτήσεις $f_1(z)$, $f_2(z)$ έχουν παράγωγο και τα σημεία στα οποία είναι αναλυτικές.



γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\mathrm{I}_1 = \oint_C f_1(z)dz \quad \text{και} \quad \mathrm{I}_2 = \oint_C f_2(z)dz\,,$$

όπου C είναι ο θετικά προσανατολισμένος βρόχος OAB του σχήματος. Το τόξο BO είναι κυκλικό τόξο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα ίση με 1. Τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες (1,0) και (1,1) αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)}\,, \quad f_2(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)}\cosh\left(\frac{1}{z}\right).$$

α) Πότε ένα σημείο z_0 λέγεται πόλος μιας συνάρτησης $f(z)$; Να προτείνετε δύο χωρία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία το ανάπτυγμα της $f_1(z)$ να είναι ένα ανάπτυγμα Taylor (δεν θα το υπολογίσετε) δίνοντας και την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος σε κάθε περίπτωση.

β) Εξηγείστε γιατί το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f_1(z)$ σε σειρά δυνάμεων του z στο χωρίο $1<|z|<2$ είναι μια σειρά Laurent. Στη συνέχεια υπολογίστε αυτή τη σειρά.

γ) Χαρακτηρίστε τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f_2(z)$. Υπολογίστε το $\operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z)$.

ΘΕΜΑ 3. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσετε (αιτιολογώντας κάθε υπολογιστικό σας βήμα) τα ολοκληρώματα:

$$\mathrm{I}_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+5}\,, \qquad \mathrm{I}_2=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}\,.$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Αποδείξτε ότι αν $f_2(x)=f_1(ax)$ όπου a ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός τότε οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες Fourier συνδέονται με την σχέση $F_2(k)=\dfrac{1}{|a|}F_1\left(\dfrac{k}{a}\right)$.

β) Υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x)=e^{-x}H(x)$ όπου $H(x)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

γ) Εφαρμόστε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier για να λύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2t}\frac{\partial u}{\partial t}+u$$

η οποία συνοδεύεται από τις συνθήκες:

<u>Συνοριακές συνθήκες</u>: $u(-\infty,t)=u(+\infty,t)=0$.

<u>Αρχική συνθήκη</u>: $u(x,0)=f(x)$ όπου $f(x)$ η συνάρτηση του ερωτήματος (β).

Σημειώστε ότι η ζητούμενη συνάρτηση $u(x,t)$ μπορεί να εκφρασθεί απλά με τη βοήθεια της συνάρτησης σφάλματος:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi\,.$$