ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Δείτε στις «Σημειώσεις Μιγαδικού Λογισμού».

β) Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $f_1(z)$ γράφονται $u(x,y)=x^2-y^2$ και $v(x,y)=-2xy$. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των $u(x,y)$ και $v(x,y)$

$u_x=2x$, $u_y=-2y$, $v_x=-2y$, $v_y=-2x$,

είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x*,*y*. Επομένως, η $f_1(z)$ θα έχει παράγωγο στα σημεία που ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Αυτές μας δίνουν

$$u_x=v_y \;\Rightarrow\; 2x=-2x \;\Rightarrow\; x=0,$$

$$u_y=-v_x \;\Rightarrow\; -2y=2y \;\Rightarrow\; y=0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει η παράγωγος μόνο στο σημείο $z=0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η ικανοποίηση των εξισώσεων Cauchy-Riemann μπορεί να ελεγχθεί και μέσω της εξίσωσης $\partial f_1/\partial \overline{z}=0$. Περνώντας από τις πραγματικές μεταβλητές *x*,*y* στην μεταβλητή z η $f_1(z)$ γράφεται $f_1(z)=\overline{z}^2$, οπότε $\partial f_1/\partial \overline{z}=2\overline{z}=0 \;\Rightarrow\; z=0$.

Η $f_2(z)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία εγκοπής κλάδου της $\mathrm{Log}(2z-i)$ και στα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες των συναρτήσεων $z^2+\pi^2$, $\sinh(z-i)$. Στα υπόλοιπα σημεία του μιγαδικού επιπέδου η $f_2(z)$ είναι αναλυτική. Έτσι, τα σημεία μη-αναλυτικότητας της $f_2(z)$ έχουν ως εξής:

- Για την $\mathrm{Log}(2z-i)$: Τα σημεία εγκοπής κλάδου προσδιορίζονται από τις σχέσεις $\mathrm{Im}(2z-i)=0$ και $\mathrm{Re}(2z-i)\le 0$. Αυτά προφανώς είναι τα σημεία της ημιευθείας $z=x+i/2$ με $x\le 0$.

- Για την $z^2+\pi^2=0$: Οι ρίζες της $z^2+\pi^2$ είναι οι $z=\pm i\pi$.
- Για την $\sinh(z-i)$: Είναι γνωστό ότι οι ρίζες της συνάρτησης $\sinh z$ είναι οι $z_k=ik\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$. (Αυτό είναι προφανές από το ότι $\sinh z=-i\sin(iz)$). Επομένως οι ρίζες της $\sinh(z-i)$ είναι οι $z_k=(1+k\pi)i$ με $k\in\mathbb{Z}$.

γ) <u>Υπολογισμός του</u> $\oint_C f_1(z)dz$:

Ο βρόχος C αποτελείται από τους δρόμους ΟΑ, ΑΒ και ΒΟ με παραμετρικές εξισώσεις:

ΟΑ: $z=x$, με $-3\le x\le 0$. Εδώ $f_1[z(x)]=x^2$ και $z'(x)=1$.

ΑΒ: $z=3e^{i\theta}$, με $-\pi\le\theta\le-\pi/4$ (ή και $\pi\le\theta\le 7\pi/4$). Εδώ $f_1[z(\theta)]=\overline{z}^2(\theta)=9e^{-2i\theta}$ και $z'(\theta)=3ie^{i\theta}$.

ΒΟ: $z=(1-i)x$, με $0\le x\le 3/\sqrt{2}$. Εδώ $f_1[z(x)]=(1+i)^2x^2$ και $z'(x)=1-i$.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε αυτούς τους δρόμους έχουν ως εξής:

$$\int_{OA} f_1(z)dz=\int_0^{-3} x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg\|_0^{-3}=-9 .$$

$$\int_{\mathrm{AB}} f_1(z)dz=\int_{-\pi}^{-\pi/4} 9e^{-2i\theta}3ie^{i\theta}d\theta=-27e^{-i\theta}\Big\|_{-\pi}^{-\pi/4}=-27(e^{i\pi/4}+1)=-27\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz=\int_{3/\sqrt{2}}^{0}(1+i)^2(1-i)x^2dx==2i(1-i)\frac{x^3}{3}\Bigg\|_{3/\sqrt{2}}^{0}=-\frac{9\sqrt{2}}{2}(1+i) .$$

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{\mathrm{OA}} f_1(z)dz + \int_{\mathrm{AB}} f_1(z)dz + \int_{\mathrm{BO}} f_1(z)dz =$$

$$= -9 - 27\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{9\sqrt{2}}{2}(1+i) = -18\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+i).$$

<u>Υπολογισμός του $\oint_C f_2(z)dz$</u>: Τα σημεία $\pm i\pi$, $x+i/2$ με $x \le 0$ βρίσκονται όλα έξω από το βρόχο *C*. Από τα σημεία $(1+k\pi)i$ με $k \in \mathbb{Z}$ μόνο το σημείο $z_0 = (1-\pi)i$ το οποίο είναι απλός πόλος βρίσκεται μέσα στο βρόχο. Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα έχουμε:

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) = 2\pi i \frac{\mathrm{Log}(2z_0 - i)}{\left(z_0{}^2 + \pi^2\right)\cosh(z_0 - i)} =$$

$$= 2\pi i \frac{\mathrm{Log}[(2\pi-1)i]}{\left[\pi^2 - (1-\pi)^2\right]\cosh(-i\pi)} = 2\pi i \frac{\ln(2\pi-1) - i\dfrac{\pi}{2}}{(2\pi-1)\cos\pi} = -\pi\frac{\pi + 2i\ln(2\pi-1)}{2\pi-1}.$$

ΘΕΜΑ 2.

α) Η απεικόνιση δεν είναι σύμμορφη στα σημεία που η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική και στα σημεία που $f_1'(z) = \left(-2/z^2\right)+1=0$. Αυτά τα σημεία είναι τα $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{2}$, $z_3 = -\sqrt{2}$. Η γωνία στροφής στο σημείο $z_0 = 1+i$ ισούται με $\arg[f_1'(z_0)] = \arg\left[1-2/(1+i)^2\right] = \arg(1+\mathrm{i}) = \pi/4$. Ο συντελεστής κλίμακας ισούται με $\left|f_1'(z_0)\right| = |1+i| = \sqrt{2}$.

Η $f_1(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο $z_0 = 1$. Η ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor ισούται με 1 όσο είναι η απόσταση από το πλησιέστερο προς το z_0 ανώμαλο σημείο που είναι το 0. Το χωρίο στο οποίο η σειρά Taylor συγκλίνει είναι το $|z-1|<1$. Θα έχουμε κατά σειρά

$$f_1(z) = z + \frac{2}{z} = 1+z-1+\frac{2}{1-[-(z-1)]} = 1+z-1+2\sum_{n=0}^{\infty}[-(z-1)]^n =$$

$$= 1+z-1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = 3-(z-1)+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

β) Το χωρίο $2 < |z| < 3$ είναι ένα δακτυλιοειδές χωρίο που στο εσωτερικό του δηλαδή στο χωρίο $|z| \leq 2$ υπάρχει ένα ανώμαλο σημείο της $f_2(z)$. Επομένως το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων του z της $f_2(z)$ σε αυτό το χωρίο δεν μπορεί να είναι ένα ανάπτυγμα Taylor αλλά θα είναι ένα ανάπτυγμα Laurent. Για τον υπολογισμό του αναλύουμε αρχικά την ρητή συνάρτηση $f_2(z)$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{z+1}{(z-2)(z-3)} = \frac{4}{z-3} - \frac{3}{z-2}.$$

Καθένα από αυτά τα απλά κλάσματα στο χωρίο $2 < |z| < 3$ όπου $2/|z| < 1$ και $|z|/3 < 1$ αναπτύσσεται ως εξής:

$$\frac{3}{z-2} = \frac{3}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

$$\frac{4}{z-3} = -\frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Επομένως το ζητούμενο ανάπτυγμα Laurent γράφεται

$$f_2(z) = -3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad .$$

γ) Η συνάρτηση $f(z) = (z-1)^2 e^{1/z}$ είναι παντού αναλυτική εκτός από το σημείο $z_0 = 0$ το οποίο είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο. Το ανάπτυγμα της $f(z)$ σε σειρά Laurent στο χωρίο $|z| > 0$ γράφεται:

$$f(z) = (z-1)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right) = (z^2 - 2z + 1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}}\right) - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-1}}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right) = z^2 - z + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}\right]\frac{1}{z^n} =$$

$$= z^2 - z + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{n^2+n-1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}\right].$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο $z_0 = 0$ είναι ο συντελεστής του $1/z$ στην ανωτέρω σειρά Laurent. Δηλαδή

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0} f(z) = 1 - \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \ .$$

Τώρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

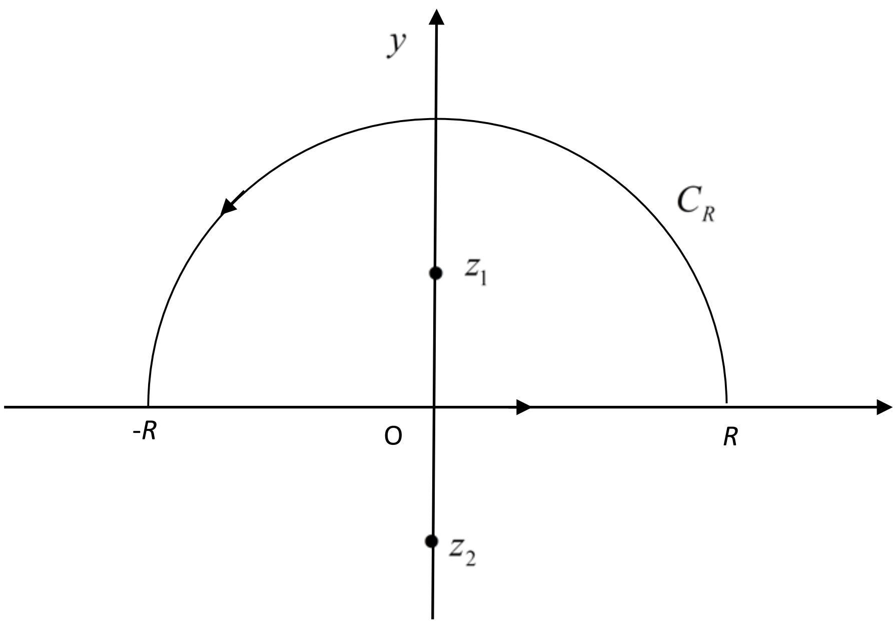
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z_0=0} f(z) = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi}{3} i \ .$$

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)^3}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της. Αυτές είναι οι $z_1 = i$ (πόλος τάξης 3) και $z_2 = -i$ (απλός πόλος).



Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C και την συνάρτηση $f(z)$ μας δίνει

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \qquad (3.1)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_1 γράφεται

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\frac{1}{z+i}}{(z-i)^3} = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z+i}\right)''\Bigg\|_{z=i} = \frac{1}{(z+i)^3}\Bigg\|_{z=i} = \frac{1}{(2i)^3} = \frac{i}{8}.$$

Αντικαθιστούμε την ποιο πάνω τιμή στη σχέση (3.1) που γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\frac{\pi}{4}. \qquad (3.2)$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια της ανισότητας Darboux ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Γι’ αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για τα σημεία z πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R$) για να πάρουμε:

$$\left|(z+i)(z-i)^3\right| = |z+i||z-i|^3 \geq \left||z|-1\right|\left||z|-1\right|^3 = (R-1)^4$$

οπότε

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(R-1)^4} \ .$$

Τώρα η ανισότητα Darboux γράφεται

$$0 \leq \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \pi R\frac{1}{(R-1)^4} \ .$$

Στο όριο που $R \to +\infty$ επειδή $\lim_{R\to\infty} R/(R-1)^4 = 0$ από την ανισότητα Darboux έπεται ότι

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz\right| = 0,$$

και έτσι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0 \ ,$$

και η (3.2) γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+i)(x-i)^3}dx = -\frac{\pi}{4} \ .$$

<u>Σημείωση</u>: Εναλλακτικά ο υπολογισμός του ολοκληρώματος θα μπορούσε να γίνει με επιλογή του ημικυκλικού βρόχου στο κάτω ημιεπίπεδο $(y<0)$. Το πλεονέκτημα είναι ότι με αυτό τον τρόπο αντί να έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στον πόλο τρίτης τάξης $z_1 = i$ θα έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στον απλό πόλο $z_2 = -i$.

β) Το ολοκλήρωμα αυτό εντάσσεται στην γενική κατηγορία των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$. Δηλαδή το αρχικό πραγματικό ολοκλήρωμα θα προκύπτει σαν η παραμετροποίηση αυτού του δρομικού ολοκληρώματος.

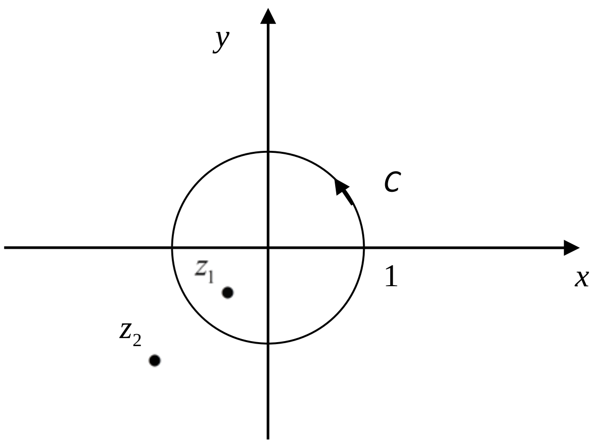
Πάνω στον μοναδιαίο κύκλο C με κέντρο την αρχή θα έχουμε λοιπόν $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z-z^{-1})2i$ και $d\theta = dz/iz$. Έτσι το προτεινόμενο προς υπολογισμό ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή του δρομικού ολοκληρώματος

$$\mathrm{I}_2 = \oint_C \frac{\frac{1}{iz}}{\frac{z-z^{-1}}{2i} + \frac{z+z^{-1}}{2} + 2} dz = \oint_C \frac{2}{(1+i)z^2 + 4iz + i - 1} dz$$

Εδώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι ρητή και επομένως αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή που είναι απλοί πόλοι. Οι ρίζες αυτές υπολογίζονται εύκολα (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) και είναι

$$z_1 = -\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{1+i}{2}\ , \quad z_2 = -\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{1+i}{2}\ .$$

Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος *C* έχει κέντρο την αρχή, για να ελέγξουμε αν τα σημεία που αντιστοιχούν στους πόλους z_1 και z_2 βρίσκονται εντός ή εκτός του *C* δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τα μέτρα $|z_1|$ και $|z_2|$. Επειδή λοιπόν $|z_1| = \sqrt{2} - 1 < 1$, και $|z_2| = \sqrt{2} + 1 > 1$, συμπεραίνουμε ότι μόνο το z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του *C*.



Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε

$$\mathrm{I} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left[\frac{2}{(1+i)z^2 + 4iz + i - 1}\right] = 2\pi i \frac{2}{2(1+i)z_1 + 4i} = \frac{4\pi i}{-\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1+i\right)^2 + 4i} = \pi\sqrt{2}$$

Τελικά

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 2} = \sqrt{2}\pi \ .$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της η συνάρτηση $f(x)$ είναι διάφορη του μηδενός μόνο στο διάστημα $(0,\pi)$. Ειδικότερα,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{αν } x \in (0,\pi) \\ 0 & \text{αν } x \in (-\infty,0) \cup (\pi,+\infty) \end{cases}$$

Η μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)$ γράφεται

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin x e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right) e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} \left(e^{i(1-k)x} - e^{-i(1+k)x} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} i} \left[\frac{e^{i(1-k)x}}{i(1-k)} + \frac{e^{i(1+k)x}}{i(1+k)} \right] \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i(1-k)\pi}}{1-k} + \frac{e^{i(1+k)\pi}}{1+k} - \frac{1}{1-k} - \frac{1}{1+k} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} \right) \left(1 + e^{-ik\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + e^{-ik\pi}}{1-k^2} \ .$$

Ο τύπος Parseval-Plancherel γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk \ .$$

Εδώ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \overline{F(k)} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + e^{-ik\pi}}{1-k^2} \frac{1 + e^{ik\pi}}{1-k^2} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 + e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}{(1-k^2)^2} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(k\pi)}{(1-k^2)^2} dk \ .$$

Τελικά ο τύπος Parseval-Plancherel μας δίνει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos(k\pi)}{(1-k^2)^2} dk = \frac{\pi^2}{2} \ ,$$

και επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1+\cos(k\pi)}{(1-k^2)^2} dk = \frac{\pi^2}{4} \ .$$

β) Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{F}$ τον μετασχηματισμό Fourier ως προς την μεταβλητή *x*, και με $U(k,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$ την μετασχηματισμένη Fourier της $u(x,t)$ τότε γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = ikU(k,t) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial U(k,t)}{\partial t}.$$

Λαμβάνοντας αυτά υπόψη και δρώντας πάνω στην διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό $\mathcal{F}$ παίρνουμε

$$ikU = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t} + 2U \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 2(ik-2)U \ .$$

Αυτή είναι μια πρωτοτάξια γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση γράφεται

$$U(k,t) = U(k,0)e^{2(ik-2)t}, \qquad (4.1)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης $U(k,0)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier της αρχικής συνθήκης $u(x,0) = f(x)$. Πράγματι, αν δράσω πάνω στην αρχική συνθήκη με τον μετασχηματισμό $\mathcal{F}$ παίρνω $U(k,0) = F(k)$, όπου $F(k)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier που υπολογίσαμε στο ερώτημα (α). Τώρα δρώντας και στα δύο μέλη της (4.1) με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ παίρνουμε

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[U(k,0)e^{2(ik-2)t}\right] = e^{-4t}\mathcal{F}^{-1}\left[U(k,0)e^{2ikt}\right] .$$

Όμως, $\mathcal{F}^{-1}\left[U(k,0)\right]=u(x,0)=f(x)$ και έτσι με τη βοήθεια της ιδιότητας μετατόπισης της ανεξάρτητης μεταβλητής για το μετασχηματισμό Fourier καταλήγουμε στην ζητούμενη λύση

$$u(x,t)=e^{-4t}f(x+2t)=e^{-4t}\left[H(x+2t)-H(x+2t-\pi)\right]\sin(x+2t) \ .$$