ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Δείτε στο e-course στις «Περιληπτικές Σημειώσεις» σελ.7 και σελ.15.

β) Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $f_1(z)$ γράφονται $u(x,y)=\sin(\pi x)$ και $v(x,y)=\sin(\pi y)$. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των $u(x,y)$ και $v(x,y)$

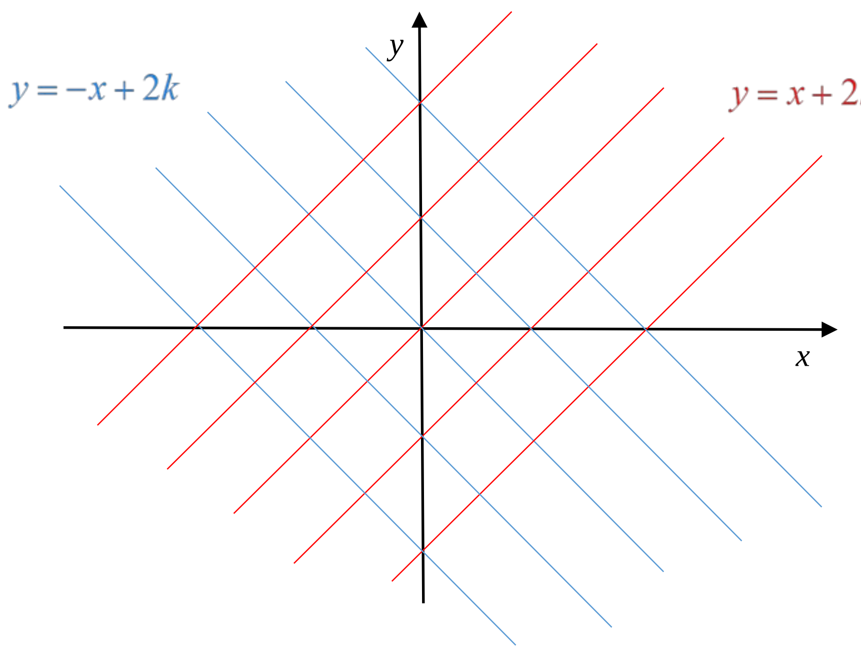
$$u_x = \pi\cos(\pi x),\ u_y = 0,\ v_x = 0,\ v_y = \pi\cos(\pi y),$$

είναι προφανώς συνεχείς σε όλο το επίπεδο *x,y*. Επομένως, η $f_1(z)$ θα έχει παράγωγο στα σημεία που ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Αυτές μας δίνουν

$$u_x = v_y \ \Rightarrow\ \pi\cos(\pi x) = \pi\cos(\pi y) \ \Rightarrow\ y = \pm x + 2k \text{ με } k\in\mathbb{Z},$$

$$u_y = -v_x \ \Rightarrow\ 0=0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει η παράγωγος μόνο πάνω στις δύο οικογένειες ευθειών $z = x + i(x+2k)$ και $z = x + i(-x+2k)$ με $k\in\mathbb{Z}$.



Η $f_1(z)$ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου ούτε και στα σημεία των ευθειών όπου έχει παράγωγο.

Η $f_2(z)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της εξίσωσης $1+\sin^2 z = 0$. Στα υπόλοιπα σημεία του μιγαδικού επιπέδου η $f_2(z)$ είναι αναλυτική. Ο υπολογισμός των σημείων αυτών έχει ως ακολούθως:

$$\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{2iz} + e^{-2iz} - 6 = 0 \;\Rightarrow\; e^{4iz} - 6e^{2iz} + 1 = 0\,.$$

Θέτουμε $e^{2iz} = w$ και η τελευταία εξίσωση γράφεται $w^2 - 6w + 1 = 0$ με ρίζες τις $w = e^{2iz} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Από αυτή έπεται ότι

$$2iz = \log\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) = \ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i2k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow$$
$$z = k\pi - \frac{i}{2}\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) = k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right),\; k \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι τα ανώμαλα σημεία της $f_2(z)$ είναι άπειρα στο πλήθος, είναι απλοί πόλοι και βρίσκονται όλα πάνω στις ευθείες $z = x - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \simeq x - i0{,}88$ και $z = x - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \simeq x + i0{,}88$.

γ) <u>Υπολογισμός του</u> $\oint_C f_1(z)dz$:

Ο βρόχος C αποτελείται από τους δρόμους ΟΑ, ΑΒ και ΒΟ με παραμετρικές εξισώσεις:

ΟΑ: $z = (1+i)x$, με $0 \le x \le 1$. Εδώ $f_1[z(x)] = (1+i)\sin(\pi x)$ και $z'(x) = 1+i$.

ΑΒ: $z = x + i$, με $-1 \le x \le 1$. Εδώ $f_1[z(x)] = \sin(\pi x)$ και $z'(x) = 1$.

ΒΟ: $z = (1-i)x$, με $-1 \le x \le 0$. Εδώ $f_1[z(x)] = (1-i)\sin(\pi x)$ και $z'(x) = 1-i$.

Τα δρομικά ολοκληρώματα πάνω σε αυτούς τους δρόμους έχουν ως εξής:

$$\int_{OA} f_1(z)dz = \int_0^1 (1+i)^2 \sin(\pi x)dx = -2i\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Bigg\|_0^1 = \frac{4}{\pi}i \ .$$

$$\int_{AB} f_1(z)dz = \int_1^{-1} \sin(\pi x)dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Bigg\|_1^{-1} = 0 \ .$$

$$\int_{BO} f_1(z)dz = \int_{-1}^{0} (1-i)^2 \sin(\pi x)dx = -2i\left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right)\Bigg\|_{3/\sqrt{2}}^{0} = \frac{4i}{\pi} \ .$$

Τελικά,

$$\oint_C f_1(z)dz = \int_{OA} f_1(z)dz + \int_{AB} f_1(z)dz + \int_{BO} f_1(z)dz = \frac{4}{\pi}i + 0 + \frac{4}{\pi}i = \frac{8}{\pi}i.$$

<u>Υπολογισμός του $\oint_C f_2(z)dz$</u>: Από τα ανώμαλα σημεία της $f_2(z)$ μόνο το σημείο $z_0 = -i\ln(\sqrt{2}-1) \simeq 0{,}88i$ βρίσκεται στο εσωτερικό του βρόχου *C*. Όλα τα άλλα ανώμαλα σημεία βρίσκονται έξω από τον *C*. Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων και λαμβανομένου υπόψη ότι το z_0 είναι απλός πόλος θα έχουμε:

$$\oint_C f_2(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f_2(z) = 2\pi i \frac{1}{2\sin z_0 \cos z_0} = \frac{2\pi i}{\sin(2z_0)} \ .$$

Παρατηρούμε ότι

$$e^{2iz_0} = 3-2\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \sin(2z_0) = \frac{3-2\sqrt{2}-\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2i} = 2\sqrt{2}i \ .$$

Τελικά

$$\oint_C f_2(z)dz = \frac{2\pi i}{2\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ .$$

ΘΕΜΑ 2.

α) Για το θεώρημα Taylor δείτε στο e-course στις «Περιληπτικές Σημειώσεις» σελ. 18. Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $g(z)$ είναι τα $z=0$ και $z=2+k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$. Από αυτά το $z=2$ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $(z-2)\sin(z-2)=0$ ενώ τα σημεία $z=2+k\pi$ με $k\neq 0$ είναι απλές ρίζες. Έτσι συμπεραίνουμε ότι:

$z=2$: Πόλος τάξης 2

$z=2+k\pi$, $k=\pm 1,\pm 2,\cdots$: Απλοί πόλοι.

Το $z=0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

β) Η $f(z)$ είναι αναλυτική παντού στον κυκλικό δίσκο $|z|<1$. Γι' αυτό σύμφωνα με το θεώρημα Taylor το ανάπτυγμά της σε σειρά δυνάμεων του z θα είναι ένα ανάπτυγμα MacLaurin (δηλαδή Taylor με κέντρο την αρχή $z=0$).

Για τον υπολογισμό της σειράς MacLaurin αναλύουμε αρχικά την ρητή συνάρτηση $f(z)$ σε απλά κλάσματα:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1+z}{1+z^2} \ .$$

Στο χωρίο $|z|<1$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n} \ .$$

Έτσι στο χωρίο $|z|<1$ η $f(z)$ αναλύεται σε σειρά MacLaurin ως εξής:

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n-(1+z)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}=-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1} \ .$$

Αφού παρατηρήσουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n+1} \ ,$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]z^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]z^{2n+1} \ .$$

Στα ανωτέρω αθροίσματα οι μη-μηδενικοί όροι είναι μόνο οι όροι με n=άρτιος και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2z^{4n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2z^{4n+1} = -2(1+z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} \ .$$

γ) Η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο σημείο $z=1$ που συνιστά τον (εκφυλισμένο σε ένα σημείο) κεντρικό κυκλικό δίσκο του δακτυλιοειδούς χωρίου $0<|z-1|<R$. Τα υπόλοιπα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης είναι τα $+i$ και $-i$ των οποίων η απόσταση από το $z=1$ ισούται με $\sqrt{2}$. Έτσι, αν $0<R\le\sqrt{2}$, η $f(z)$ θα είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία του δακτυλιοειδούς χωρίου και σύμφωνα με το θεώρημα Laurent το ανάπτυγμα της σε σειρά δυνάμεων του $z-1$ θα είναι μια σειρά Laurent. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε την $f(z)$ σε σειρά Laurent στο χωρίο $0<|z-1|<\sqrt{2}$. Επειδή η $f(z)$ έχει μη-πραγματικά ανώμαλα σημεία είναι βολικό για τον υπολογισμό της σειράς Laurent να την αναλύσουμε περαιτέρω σε απλά κλάσματα στο $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1-i}{z-i} - \frac{1}{2}\frac{1+i}{z+i} \ .$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι ήδη δύναμη του $z-1$. Για τον δεύτερο όρο έχουμε

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1+1-i} = \frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{1-i}\right)} \ \Rightarrow \ \frac{1-i}{z-i} = \frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{1-i}\right)} \ .$$

Παρατηρούμε ότι στο χωρίο $0<|z-1|<\sqrt{2}$ έχουμε

$$\left|-\frac{z-1}{1-i}\right| = \frac{|z-1|}{\sqrt{2}} < 1 \ ,$$

οπότε

$$\frac{1-i}{z-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^n}(z-1)^n \ .$$

Για τον τρίτο όρο γράφουμε

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-1+i+1}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)} \;\Rightarrow\; \frac{1+i}{z+i}=\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)}$$

και επειδή

$$\left|-\frac{z-1}{1+i}\right|=\frac{|z-1|}{\sqrt{2}}<1 \ ,$$

θα έχουμε

$$\frac{1+i}{z+i}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^n}(z-1)^n \ .$$

Τελικά το ζητούμενο ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ γράφεται

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(1-i)^n}+\frac{1}{(1+i)^n}\right](z-1)^n .$$

Το κύριο μέρος αυτής της σειράς Laurent συνίσταται από τον μοναδικό όρο $1/(z-1)$. Αν παρατηρήσει κανείς ότι $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ και $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ τότε θα μπορέσει να γράψει αυτή τη σειρά Laurent σε μια πιο συμπαγή μορφή ως εξής:

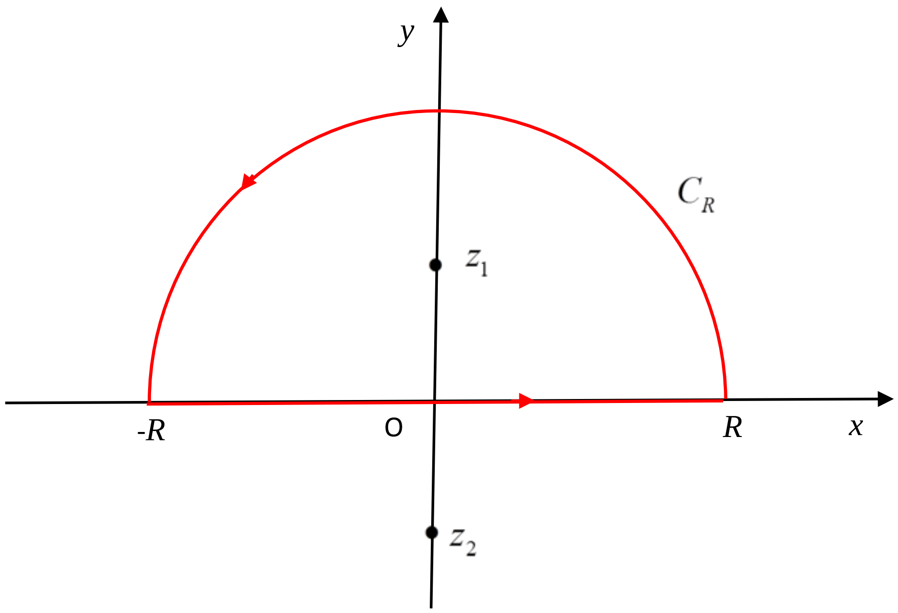
$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(e^{in\pi/4}+e^{-in\pi/4}\right)(z-1)^n \;\Rightarrow$$
$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cos(n\pi/4)(z-1)^n$$

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z)=f(z)e^{iz} \quad \text{με} \quad f(z)=\frac{z^3}{\left(z^2+1\right)^2}$$

και τον θετικά προσανατολισμένο ημικυκλικό βρόχο C του σχήματος που αποτελείται από το ημικύκλιο C_R κέντρου Ο και την διάμετρό του $(-R)R$ επί του άξονα των x.



Η συνάρτηση $g(z)$ είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της $(z^2+1)^2=0$. Αυτές είναι οι $z_1=i$ (πόλος τάξης 2) και $z_2=-i$ (πόλος τάξης 2). Παρατηρούμε ότι από αυτές τις ρίζες μόνο η z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο ($y>0$) ενώ καμία δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα των x.

Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων εφαρμοζόμενο για το βρόχο C και την συνάρτηση $g(z)$ μας δίνει

$$\oint_C g(z)dz=\int_{C_R} g(z)dz+\int_{-R}^{R} g(x)dx=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z)$$

Αφήνουμε την ακτίνα R να τείνει προς το άπειρο και η πιο πάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz+\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) \qquad (3.1)$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο z_1 (που είναι διπλός πόλος της $g(z)$) είναι

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z)=\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{z^3e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}=\left[\frac{z^3e^{iz}}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}=\frac{(z+i)(3z^2+iz^3)-2z^3}{(z+i)^3}e^{iz}\Bigg\|_{z=i}=\frac{1}{4}e^{-1}$$

οπότε η σχέση (3.1) γράφεται

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = i\frac{\pi}{2e}. \tag{3.2}$$

Τώρα θα δείξουμε με την βοήθεια του λήμματος Jordan (e-course, «Περιληπτικές Σημειώσεις» σελ.23) ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$. Γι' αυτό το σκοπό παρατηρούμε ότι πάνω στον δρόμο C_R (όπου $|z| = R$) ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

$$\left|z^2+1\right| \geq \left|\left|z^2\right|-1\right| = \left|\left|z\right|^2-1\right| = R^2-1 \Rightarrow \frac{1}{\left|z^2+1\right|^2} \leq \frac{1}{\left(R^2-1\right)^2},$$

Από αυτή προκύπτει ότι πάνω στον C_R η $f(z)$ φράσσεται ως εξής:

$$\left|f(z)\right| \leq M_R \equiv \frac{R^3}{\left(R^2-1\right)^2}\ .$$

Όμως $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ και έτσι από το λήμμα Jordan έπεται ότι $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$. Τώρα η σχέση (3.2) γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ix}}{\left(x^2+1\right)^2}dx = i\frac{\pi}{2e}.$$

Από την εξίσωση του φανταστικού μέρους των δύο μελών της ανωτέρω σχέσης προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Σημειώστε ότι επειδή η συνάρτηση κάτω από την ολοκλήρωση είναι άρτια θα έχουμε και

$$\mathrm{I}_1 = \int_{0}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi}{4e}\ .$$

β) Το ολοκλήρωμα αυτό εντάσσεται στην γενική κατηγορία των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$. Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογισθούν με την μετατροπή τους σε ένα δρομικό ολοκλήρωμα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$. Δηλαδή το αρχικό πραγματικό ολοκλήρωμα θα προκύπτει σαν η παραμετροποίηση αυτού του δρομικού ολοκληρώματος.

Πάνω στον μοναδιαίο κύκλο *C* με κέντρο την αρχή θα έχουμε λοιπόν $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z - z^{-1})2i$ και $d\theta = dz/iz$. Έτσι το προτεινόμενο προς υπολογισμό ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή του δρομικού ολοκληρώματος

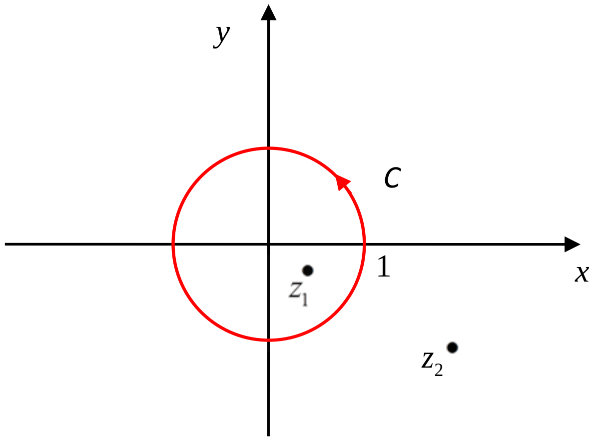
$$\mathrm{I}_2 = \oint_C \frac{1}{3 - 2\dfrac{z + z^{-1}}{2} + \dfrac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{dz}{3iz - \left(iz^2 + i\right) + \dfrac{1}{2}\left(z^2 - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_2 = \oint_C \frac{2dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

Εδώ η συνάρτηση που ολοκληρώνεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι ρητή και επομένως αναλυτική παντού στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή που είναι απλοί πόλοι. Οι ρίζες αυτές υπολογίζονται εύκολα (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) και είναι

$$z_1 = \frac{2 - i}{5}\ ,\quad z_2 = 2 - i\ .$$

Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος *C* έχει κέντρο την αρχή, για να ελέγξουμε αν τα σημεία που αντιστοιχούν στους πόλους z_1 και z_2 βρίσκονται εντός ή εκτός του *C* δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τα μέτρα $|z_1|$ και $|z_2|$. Επειδή λοιπόν $|z_1| = \sqrt{5}/5 < 1$, και $|z_2| = \sqrt{5} > 1$, συμπεραίνουμε ότι μόνο ο πόλος z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του *C*.



Τώρα με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε

$$\mathrm{I}_2 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1}\left[\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}\right] = 2\pi i\frac{2}{2(1-2i)z_1+6i} =$$
$$2\pi i\frac{1}{(1-2i)z_1+3i} = 2\pi i\frac{5}{(1-2i)(2-i)+15i} = \pi \ .$$

ΘΕΜΑ 4.

α) Η μετασχηματισμένη Fourier γράφεται

$$\mathcal{F}[g(x)] \equiv G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx \ ,$$

οπότε σύμφωνα θα έχουμε

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ikx}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ikx}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-ik}e^{(1-ik)x}\Big\|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{1+ik}e^{-(1+ik)x}\Big\|_{0}^{+\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-ik}+\frac{1}{1+ik}\right)$$

και τελικά

$$G(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}.$$

Σύμφωνα με την αρχή της συμμετρίας (ecourse, «Περιληπτικές Σημειώσεις», σελ.32) η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $G(x) = \sqrt{2/\pi}\Big/(x^2+1) = \sqrt{2/\pi}\, f(x)$ είναι η συνάρτηση $g(-k) = e^{-|-k|} = e^{-|k|}$. Δηλαδή

$$\mathcal{F}\left[\sqrt{2/\pi}\, f(x)\right] = \sqrt{2/\pi}\,\mathcal{F}\left[\, f(x)\right] = e^{-|k|} \ ,$$

ή ισοδύναμα,

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \ .$$

Ο τύπος Parseval –Plancherel γράφεται (ecourse, «Περιληπτικές Σημειώσεις», σελ.33):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(k)\right|^2 dk \ .$$

Εδώ οι συναρτήσεις $f(x)$ και $F(k)$ είναι πραγματικές και ο τύπος γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \right)^2 dk \ .$$

Από αυτόν με στοιχειώδη ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|k|} dk = \frac{\pi}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{2k} dk + \int_{0}^{+\infty} e^{-2k} dk \right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

β) Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{F}$ τον μετασχηματισμό Fourier ως προς την μεταβλητή *x*, και με $U(k,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$ την μετασχηματισμένη Fourier της $u(x,t)$ τότε γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -k^2 U(k,t) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial U(k,t)}{\partial t}.$$

Λαμβάνοντας αυτά υπόψη και δρώντας πάνω στην διαφορική εξίσωση με τον μετασχηματισμό $\mathcal{F}$ παίρνουμε

$$-k^2U-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t}=-k^2U\ .$$

Αυτή είναι μια πρωτοτάξια γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση γράφεται

$$U(k,t)=U(k,0)e^{-k^2t}, \qquad (4.1)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης $U(k,0)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier της αρχικής συνθήκης $u(x,0)=f(x)$. Πράγματι, αν δράσω πάνω στην αρχική συνθήκη με τον μετασχηματισμό $\mathcal{F}$ παίρνω $U(k,0)=F(k)$, όπου $F(k)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier που έχουμε υπολογίσει στο ερώτημα (α). Τώρα δρώντας και στα δύο μέλη της (4.1) με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ παίρνουμε

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}\left[U(k,0)e^{-k^2t}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|k|}e^{-k^2t}\right]. \qquad (4.2)$$

Εδώ η αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier μπορεί να γραφεί αμέσως με την βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης. Πράγματι, από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|k|}\right]=\sqrt{2/\pi}\,f(x)$ ενώ εύκολα βρίσκουμε ότι (δείτε τις σημειώσεις παράδειγμα 5 σελ.188) $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-tk^2}\right]=e^{-x^2/4t}\big/\sqrt{2t}$. Έτσι, με εφαρμογή του θεωρήματος της συνέλιξης (ecourse, «Περιληπτικές Σημειώσεις», σελ.33) παίρνουμε:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\frac{1}{\xi^2+1}d\xi\ .$$

(Δείτε τον αντίστοιχο τύπο (5.34) σελ.204 στις σημειώσεις του μιγαδικού λογισμού που διανεμήθηκαν). Το ολοκλήρωμα αυτό δεν εκφράζεται με την βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον τελευταίο τύπο ως την τελική μορφή της ζητούμενης λύσης.

Παρατηρήσεις: Για όσους ενδιαφέρονται σημειώνουμε ότι η ανωτέρω λύση μπορεί να εκφρασθεί απλά με τη βοήθεια της «συνάρτησης σφάλματος» (error function). Αυτή ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta \ ,$$

όπου η μεταβλητή z και η μεταβλητή ολοκλήρωσης ζ είναι εν γένει μιγαδικές. Η γραφή του δρομικού ολοκληρώματος με τα όρια είναι επιτρεπτή εδώ αφού δεδομένου ότι η $e^{-\zeta^2}$ είναι ακεραία αναλυτική συνάρτηση η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από τον δρόμο ολοκλήρωσης αλλά από το αρχικό και τελικό σημείο του δρόμου. Όμως, όπως προκύπτει στη συνέχεια μας είναι τελικά πιο χρήσιμη για τη γραφή του τελικού τύπου της $u(x,t)$ η «συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος» (complementary error function) η οποία ορίζεται μέσω της συνάρτησης σφάλματος από τον τύπο:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta \ .$$

Ας επανέλθουμε τώρα στον ανωτέρω τύπο (4.2). Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier που υπεισέρχεται εκεί γράφεται:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|k|}e^{-k^2t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|-k^2t} e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1+ix)k-k^2t} dk + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1+ix)k-k^2t} dk \right)$$

Τα ανωτέρω δύο ολοκληρώματα μετασχηματίζονται εύκολα κατά τα γνωστά με συμπλήρωση του τετραγώνου στον εκθέτη. Δηλαδή αφού παρατηρήσουμε ότι

$$(1+ix)k - k^2t = -\left(\sqrt{t}k - \frac{1+ix}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{(1+ix)^2}{4t} \ ,$$

$$(-1+ix)k - k^2t = -\left(\sqrt{t}k + \frac{1-ix}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{(1-ix)^2}{4t} \ ,$$

το πρώτο από τα δύο ολοκληρώματα γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(1+ix)k-k^2t}dk = e^{\frac{(1+ix)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\left(\sqrt{t}k-\frac{1+ix}{2\sqrt{t}}\right)^2} dk \ .$$

Αν αλλάξουμε τώρα την μεταβλητή ολοκλήρωσης θέτοντας $\zeta = -\sqrt{t}k + (1+ix)\big/2\sqrt{t}$ (όπου τώρα η νέα μεταβλητή ζ είναι μιγαδική) το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(1+ix)k-k^2t}dk = e^{\frac{(1+ix)^2}{4t}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\frac{1+ix}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{\frac{(1+ix)^2}{4t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1+ix}{2\sqrt{t}}\right) \ .$$

Τώρα εντελώς ανάλογα θα έχουμε

$$\int_{0}^{+\infty} e^{(-1+ix)k-k^2t}dk = e^{\frac{(1-ix)^2}{4t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{t}k-\frac{1-ix}{2\sqrt{t}}\right)^2} dk \ ,$$

και με την αλλαγή $\zeta = \sqrt{t}k - (1-ix)\big/2\sqrt{t}$ στην μεταβλητή ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\int_{0}^{+\infty} e^{(-1+ix)k-k^2t}dk = e^{\frac{(1-ix)^2}{4t}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\frac{1-ix}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{\frac{(1-ix)^2}{4t}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{1-ix}{2\sqrt{t}}\right) \ .$$

Τελικά επιστρέφοντας στην (4.2) μπορούμε να γράψουμε τη λύση στη μορφή:

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{1-x^2}{4t}} \left[e^{i\frac{x}{2t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1+ix}{2\sqrt{t}}\right) + e^{-i\frac{x}{2t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1-ix}{2\sqrt{t}}\right) \right] \ .$$